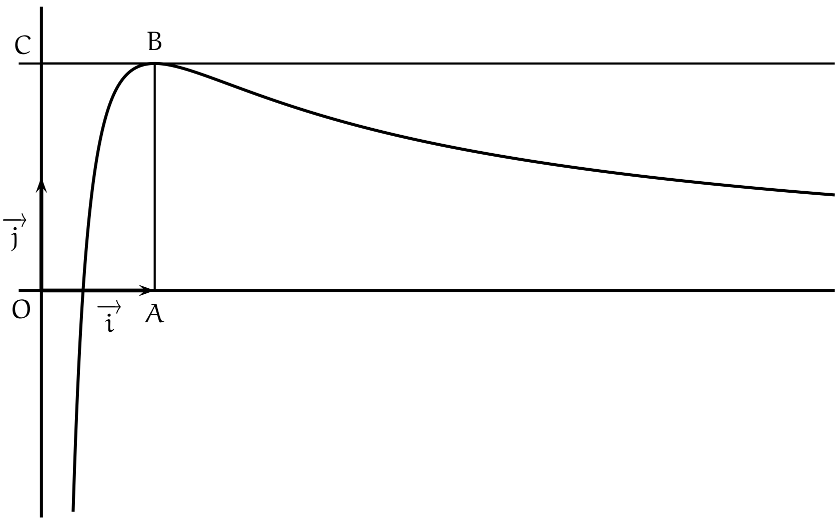
France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (7 points) (commun à tous les candidats)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1) a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b.

2) a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4) On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0 Affecter à b la valeur 1

Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	    Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	    Si $f(m) < 1$ alors affecter à a la valeur m.
	    Sinon affecter à b la valeur m.
	    Fin de Si.
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher a. Afficher b.

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5) Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\ dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

