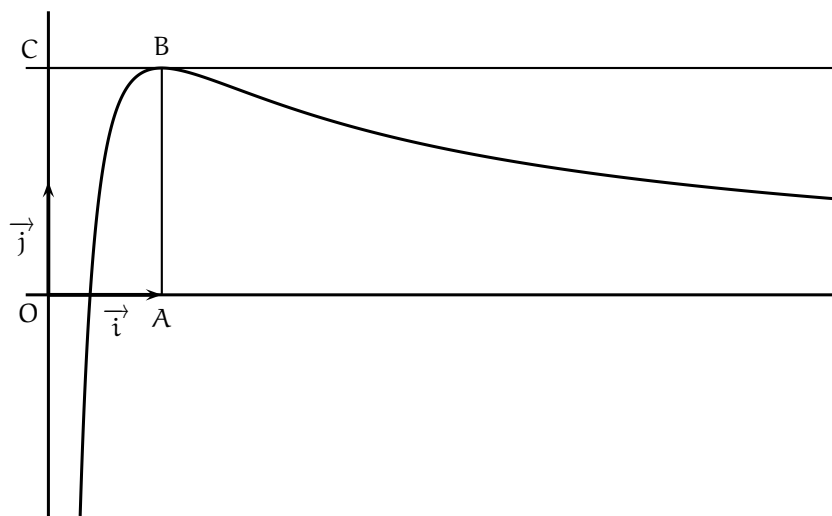


France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (7 points) (commun à tous les candidats)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1) a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b .

2) a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4) On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a , b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0 Affecter à b la valeur 1
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. Si $f(m) < 1$ alors affecter à a la valeur m . Sinon affecter à b la valeur m . Fin de Si.
Sortie :	Fin de Tant que Afficher a . Afficher b .

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
b - a					
m					

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

5) Le but de cette question est de démontrer que la courbe \mathcal{C} partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a) Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$.

b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) $f(1)$ est l'ordonnée du point B à savoir 2.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} en B. Cette tangente est la droite (BC) de coefficient directeur 0. Donc, $f'(1) = 0$.

$$f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0.$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b \ln(x)}{x^2} = \frac{(b - a) - b \ln(x)}{x^2}.$$

$$\text{Pour tout réel } x > 0, f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln(x)}{x^2}.$$

c) L'égalité $f(1) = 2$ s'écrit $\frac{a + b \ln(1)}{1} = 2$ ou encore $a = 2$.

L'égalité $f'(1) = 0$ s'écrit $\frac{(b - a) - b \ln(1)}{1^2} = 0$ ou encore $b - a = 0$ ou enfin $b = a = 2$.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, f(x) = \frac{2 + 2 \ln(x)}{x^2}.$$

2) a) D'après la question b) appliquée avec $a = b = 2$, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-2 \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{2}{x^2} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-\ln(x)$. Le signe de $\ln(x)$ étant connu, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1.

b) **Limite en 0.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}(2 + 2 \ln(x))$. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + 2 \ln(x)) = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0 + 2 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit le tableau de variations de la fonction f .

x	0	1	+	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+
f				

3) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(1) \right[=] -\infty, 2]$, il existe un réel x_0 et un seul de l'intervalle $]0, 1]$ tel que $f(x_0) = k$. Comme le réel 1 appartient à $] -\infty, 2]$, il existe un réel de $]0, 1]$ et un seul, noté α , tel que $f(\alpha) = 1$.

b) La calculatrice fournit $f(5) = 1,04\dots$ et $f(6) = 0,9\dots$. Donc, $f(5) > f(\beta) > f(6)$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$5 < \beta < 6.$$

4) a)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
b - a	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	

b) Les valeurs finales de a et de b affichées par cet algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1} . La méthode utilisée pour obtenir cet encadrement est la méthode par dichotomie.

c) **Algorithme modifié.**

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5 Affecter à b la valeur 6
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. Si $f(m) > 1$ alors affecter à a la valeur m. Sinon affecter à b la valeur m. Fin de Si.
Sortie :	Fin de Tant que Afficher a. Afficher b.

5) a) L'aire du rectangle OABC, exprimée en unités d'aires, est égale à $1 \times 2 = 2$. La moitié de cette aire est égale à 1.

Déterminons maintenant l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe (Ox).

Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 + \ln(x))}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Enfin, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et, puisque $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$.

Finalement, la courbe \mathcal{C} partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1.$$

b) Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $u' \times u$ avec pour tout $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$.

On sait qu'une primitive de la fonction $u'u$ est la fonction $\frac{1}{2}u^2$ et donc

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \, dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(2 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \right) \, dx = \left[2 \ln(x) + 2 \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\
&= \left(2 \ln(1) + 2 \frac{(\ln(1))^2}{2} \right) - \left(2 \ln(1/e) + 2 \frac{(\ln(1/e))^2}{2} \right) \\
&= -(-2 + (-1)^2) = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \, dx = 1.}$$

On a ainsi démontré que la courbe \mathcal{C} partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.