Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

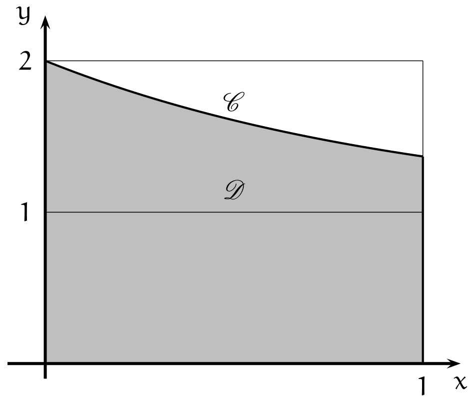
EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $g(x) > 0$.

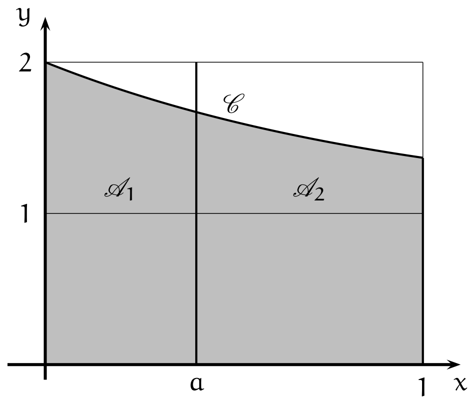
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1) a) Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.

b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2) Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}.$$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0;1]$, en un réel α.
Donner la valeur de α arrondie au centième.

3) En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1) Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2) Déterminer la valeur exacte du réel b.

