Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points $A(12;0;0)$, $B(0;-15;0)$, $C(0;0;20)$, $D(2;7;-6)$, $E(7;3;-3)$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x+y-2z-5=0$

Affirmation 1. Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x+y+2z-24=0.$$

Affirmation 2. Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=9-3t \\ y=0 \\ z=5+5t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 3. La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4. La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2

1) FAUX

2) VRAI

3) FAUX

4) VRAI

Justification 1. Notons $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $2x + y + 2z - 24 = 0$.
Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -2)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(2, 1, 2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.

L'affirmation 1 est donc fausse.

Justification 2. Notons $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-12, 0, 20)$. Un vecteur directeur de la droite (AC) est le vecteur $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(-3, 0, 5)$. $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et donc les droites $\mathscr{D}$ et (AC) sont parallèles.

Quand $t = -1$, on obtient le point de coordonnées $(12, 0, 0)$ c'est-à-dire le point A. La droite $\mathscr{D}$ contient donc le point A. Ainsi, les droites $\mathscr{D}$ et (AC) sont parallèles et ont un point commun. On en déduit que ces deux droites sont confondues ou encore, une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ sont $(5, -4, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite (DE) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + 5t \\ y = 7 - 4t \\ z = -6 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(2 + 5t, 7 - 4t, -6 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DE).

$$m \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(2 + 5t) + (7 - 4t) - 2(-6 + 3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t + 18 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution et donc la droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ n'ont pas de point commun. L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-12, -15, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-12, 0, 20)$. On note que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AB) et (AC) sont deux droites sécantes du plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = (-12) \times 5 + (-15) \times (-4) + 0 \times 3 = -60 + 60 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = (-12) \times 5 + 0 \times (-4) + 20 \times 3 = -60 + 60 = 0.$$

La droite (DE) est orthogonale est donc orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) et donc la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC). L'affirmation 4 est vraie.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.