Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques. Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

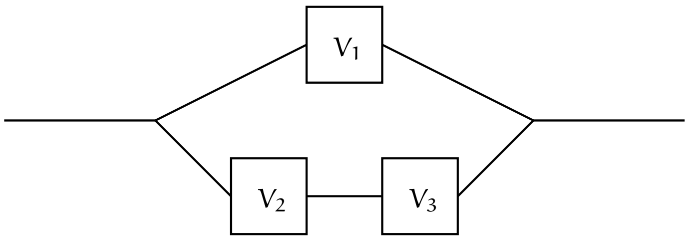
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,2$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2) Calculer la probabilité, à $0,001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à $6\,000$ heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre. Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après $6\,000$ heures. On note :

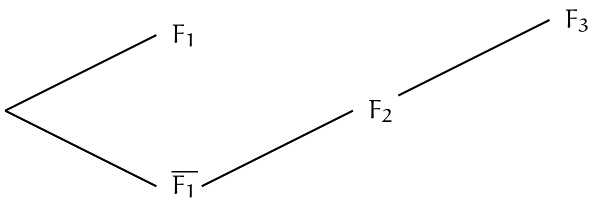
- F_1 l'événement : « la vanne V_1 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- F_2 l'événement : « la vanne V_2 est en état de marche après $6\,000$ heures »
- F_3 l'événement : « la vanne V_3 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- E : l'événement : « le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures ».

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1) L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation. Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2) Démontrer que $P(E) = 0,363$.

3) Sachant que le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.



Partie C

L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1) Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F.

2) On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1) Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2) Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3) L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1% de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A

1) La durée de vie moyenne d'une vanne est l'espérance de la variable aléatoire T.
On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$ et donc l'espérance de T est $\dfrac{1}{0,000\,2} = 5000$.

$$\boxed{\text{Une vanne dure en moyenne 5000 heures.}}$$

2)

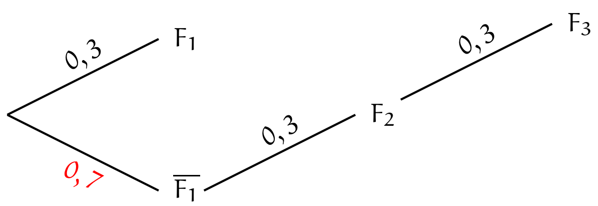
$$P(T \geqslant 6000) = 1 - P(T \leqslant 6000) = 1 - \int_0^{6000} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{6000}$$
$$= 1 - \left(-e^{0,0002\times 6000} + e^0\right) = 1 + e^{-1,2} - 1 = e^{-1,2}.$$

Donc,

$$\boxed{P(T \geqslant 6000) = e^{-1,2} = 0,301 \text{ à } 0,001 \text{ près.}}$$

Partie B

1) Puisque les événements F_1 et F_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{F_1}$ et F_2 sont indépendants. Par suite, $P_{\overline{F_1}}(F_2) = P(F_2) = 0,3$. De même, $P_{\overline{F_1} \cap F_2}(F_3) = P(F_3) = 0,3$.



2) D'après la formule des probabilités totales

$$P(E) = P(F_1) + P\left(\overline{F_1} \cap (F_2 \cap F_3)\right) = P(F_1) + (1 - P(F_1)) \times P(F_2) \times P(F_3) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3$$
$$= 0,3 + 0,063 = 0,363.$$

$$\boxed{P(E) = 0,363.}$$

3) La probabilité demandée est $P_E(F_1)$.

$$P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \frac{P(F_1) \times P_{F_1}(E)}{P(E)} = \frac{0,3 \times 1}{0,363} = \frac{0,3}{0,363} = \frac{300}{363} = \frac{100}{121}.$$

et donc

$$\boxed{P_E(F_1) = \frac{100}{121} = 0,826 \text{ arrondi au millième.}}$$

Partie C

1) Ici, $n = 400$ et $p = 0,02$. On note que l'on a $n \geqslant 30$, $np = 8$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 392$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.
L'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F est

$$\left[0,02 - 1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}, 0,02 + 1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}\right] = [0,00628; 0,03372].$$

2) La fréquence observée est $f = \frac{10}{400} = 0,025$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation déterminé à la question précédente.
Donc, on ne peut pas remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel.

Partie D

1) La calculatrice fournit $P(760 \leqslant D \leqslant 840) = 0,683$ arrondi au millième (le cours dit que $P(\mu-\sigma \leqslant D \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$).

2) La calculatrice fournit $P(D \leqslant 880) = 0,9772...$ et donc $P(D \leqslant 880) = 0,977$ arrondi au millième.

3) La probabilité d'être en rupture de stock est

$$p(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) = 0,0227\ldots,$$

soit un peu plus que $2,2\%$ de chance. Donc, l'industriel a tort.

