

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.

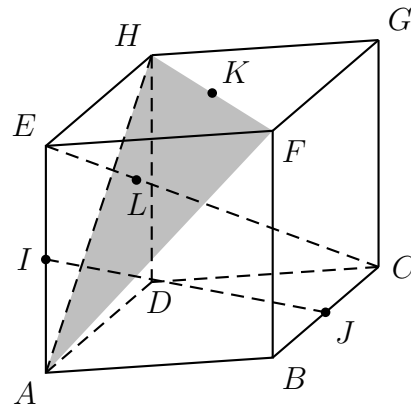
On appelle \mathcal{P} le plan (AFH) .

Le point I est le milieu du segment $[AE]$,

le point J est le milieu du segment $[BC]$,

le point K est le milieu du segment $[HF]$,

le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan \mathcal{P} .



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

- 1) a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
- 2) a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à -1 .
c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
- 3) Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:
a) Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne : $x + y + z - 1 = 0$.
b) Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne : $x - y + z = 0$.
c) Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne : $-x + y + z = 0$.
d) Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$.
- 4) a) \overrightarrow{EG} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
b) \overrightarrow{EL} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
c) \overrightarrow{IJ} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
d) \overrightarrow{DI} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
- 5) a) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
b) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$.
c) $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
d) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n .

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAE. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.

On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1) On interroge un étudiant au hasard. On note :

- A l'événement « l'étudiant répond A »,
- B l'événement « l'étudiant répond B »,
- C l'événement « l'étudiant répond C »,
- R l'événement « l'étudiant connaît la réponse »,
- \bar{R} l'événement contraire de R .

a) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

c) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2) Pour estimer r , on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a) Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r .

b) Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p .

En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95% de r .

c) Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i) Donner les paramètres de cette loi normale.

ii) Donner une valeur approchée de $P(X \leq 250)$ à 10^{-2} près.

On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leq t)$ où X est la variable aléatoire de la question 2)c).

EXERCICE 3 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

- 1) Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Partie B

On définit la fonction g_m sur \mathbb{R} par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x},$$

et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
b) Déduire de la **partie A**, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
- 2) On a représenté en annexe 2 les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
- 3) Étudier la position de la courbe \mathcal{C}_m par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
- 4) a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = 2$.
Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un volume constant de $2\,200\text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient $1\,400\text{ m}^3$ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1) Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3) L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables :	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tant que $a < 1\,100$, faire : Affecter à a la valeur ... Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher n

4) Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5) On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1, Exercice 2

E12					=LOLNORMALE(\$A12+E\$1;240;RACINE(96);VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	0,706	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0, 706 correspond à $P(X \leq 245, 3)$.

Annexe 2, Exercice 3

