Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On définit les suite (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1) Calculer u_1 et v_1.

2) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	u, v et w des nombres réels N et k des nombres entiers
Initialisation :	u prend la valeur 0 v prend la valeur 1

Début de l'algorithme :	Entrer la valeur de N
	Pour k variant de 1 à N
	    w prend la valeur u
	    u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
	    v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
	Fin du Pour
	Afficher u
	Afficher v

Fin de l'algorithme	

a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b) Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3) Pour tout entier naturel n, on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4) On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PP'.
On admet que $P'BP = A$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b) On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5) a) Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{2}{3}$.

2) a) Exécution de l'algorithme quand $N = 2$.

k	w	u	v
1	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$
2	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{11}{18}$

b) Pour un entier naturel non nul N donné, l'algorithme affiche les valeurs de $u_1, \ldots, u_N$ et $v_1, \ldots, v_N$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AX_n.$$

Donc, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

- $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $X_n = A^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \text{ (d'après la question 3)a))} \\ &= A \times A^n X_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

4) a)

$$\begin{aligned} PP' &= \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{2} & \dfrac{4}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{3} \\ \left(-\dfrac{6}{5}\right) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{2} & \left(-\dfrac{6}{5}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

Ainsi, $PP' = I$. On sait alors que l'on a aussi $P'P = I$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

- $P'B^0P = P'IP = P'P = I = A^0$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = P'B^nP$ et montrons que $A^{n+1} = P'B^{n+1}P$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= P'BP \times P'B^nP \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P'BIB^nP = P'BB^nP = P'B^{n+1}P. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} A^n = P'B^nP &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

5) a) Soit n un entier naturel.

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}.$$

b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{5}.}$$

