Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Limite de f en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$$

Limite de f en $-\infty$. Pour tout réel x, $f(x)=xe^x+e^x$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.}$$

2) Pour tout réel x,

$$f'(x)=(x+1)'e^x+(x+1)\left(e^x\right)'=1\times e^x+(x+1)\times e^x=(x+2)e^x.$$

3) Pour tout réel x, $e^x>0$. Donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x+2$. Par suite, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty,-2[$, strictement positive sur $]-2,+\infty[$ et s'annule en -2.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1) a) Soit m un réel. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g_m(x)=0 &\Leftrightarrow x+1-me^{-x}=0 \Leftrightarrow x+1=me^{-x} \Leftrightarrow (x+1)e^x=me^{-x}e^x \text{ (car } e^x\neq 0)\\ &\Leftrightarrow f(x)=m. \end{aligned}$$

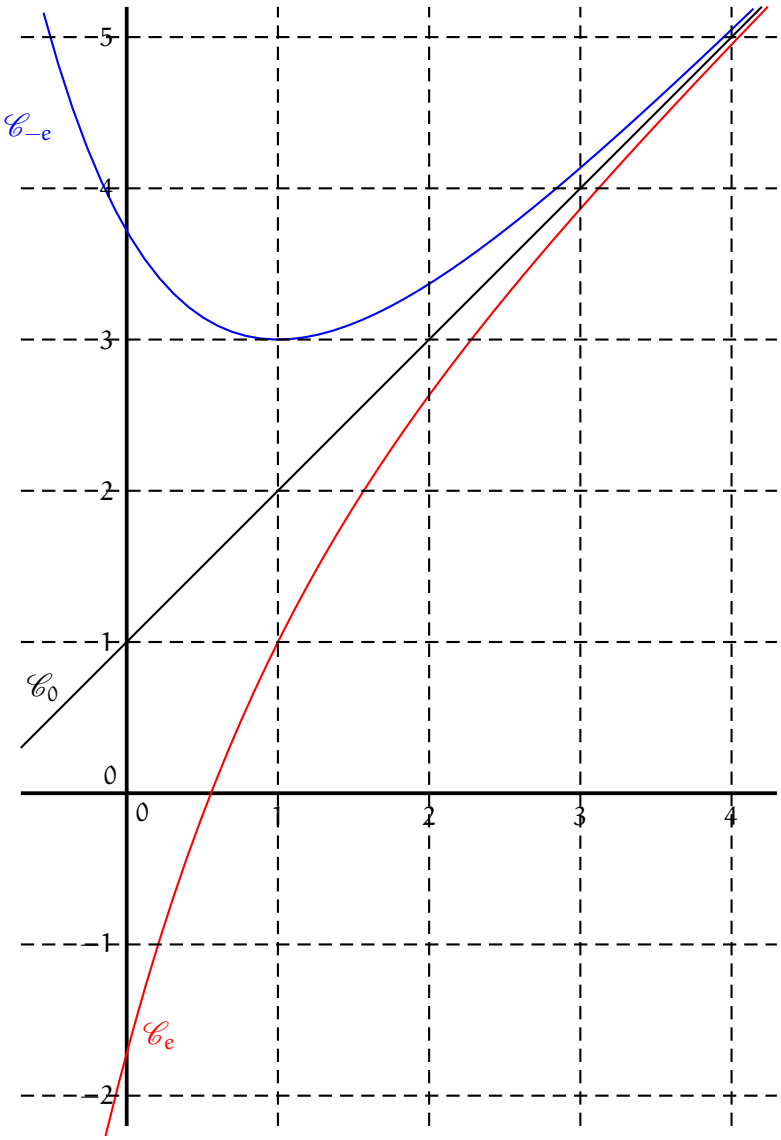
b) Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $g_m(x)=0$ ou encore les solutions de l'équation $f(x)=m$ d'après la question 1) de la partie B.

A l'aide du tableau de variations de la fonction f déterminé à la question 3) de la partie A, on peut affirmer que

- si $m<e^{-2}$, $\mathscr{C}_m$ n'a aucun point commun avec l'axe (Ox).
- si $m=e^{-2}$, $\mathscr{C}_m$ a exactement un point commun avec l'axe (Ox).
- si $e^{-2}<m<0$, $\mathscr{C}_m$ a exactement deux points commun avec l'axe (Ox).
- si $m\geqslant 0$, $\mathscr{C}_m$ a exactement un point commun avec l'axe (Ox).

2) $\mathscr{C}_0$ est le graphe d'une fonction affine et donc $\mathscr{C}_0$ est une droite. Il s'agit de la courbe 2.
$-e=-2,7\ldots$ et $-e^{-2}=-0,1\ldots$ Donc $-e<e^{-2}$. D'après la question précédente, la courbe $\mathscr{C}_{-e}$ n'a pas de point commun avec l'axe (Ox). La courbe $\mathscr{C}_{-e}$ est donc nécessairement la courbe 1.
La courbe 3 est par suite la courbe $\mathscr{C}_e$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



3) Soit m un réel. La position relative de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est obtenue grâce au signe de l'expression $g_m(x) - (x + 1)$ suivant les valeurs de x.

Pour tout réel x,

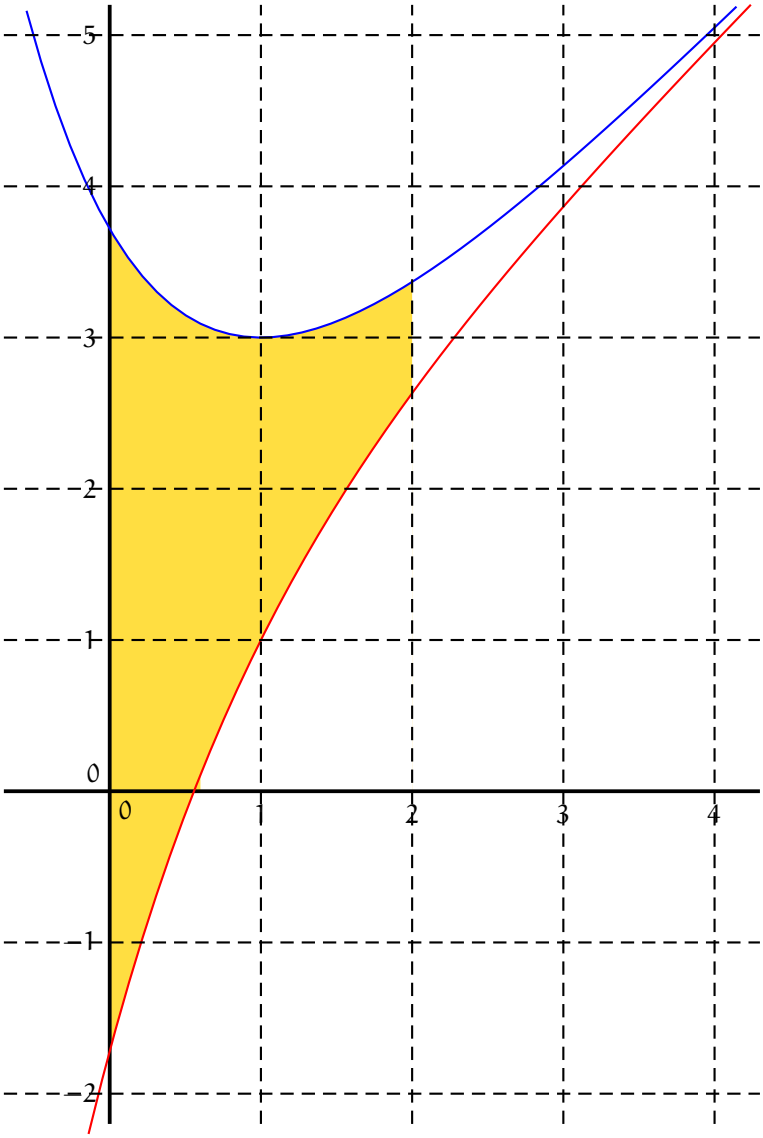
$$g_m(x) - (x + 1) = x + 1 - me^{-x} - x - 1 = -me^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1)$ est du signe de $-m$. On en déduit que

- si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1) > 0$ et dans ce cas, $\mathscr{C}_m$ est strictement au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$,
- si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x + 1) < 0$ et dans ce cas, $\mathscr{C}_m$ est strictement au-dessous de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$,
- si $m = 0$, $\mathscr{C}_m$ est la droite $\mathscr{D}$.

4) a)

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



b) Soit a un réel positif. D'après la question 3), pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) \geqslant x + 1 \geqslant g_e(x)$ et en particulier, pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) \geqslant g_e(x)$. On en déduit que

$$\mathscr{A}(a) = \int_0^a (g_{-e}(x) - g_e(x))\, dx.$$

Pour tout réel x de $[0, a]$, $g_{-e}(x) - g_e(x) = (x + 1 + e \times e^{-x}) - (x + 1 - e \times e^{-x}) = e \times e^{-x} + e \times e^{-x} = 2e \times e^{-x}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a 2e \times e^{-x}\, dx \\
&= 2e \int_0^a e^{-x}\, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= 2e \left[-e^{-x}\right]_0^a = 2e\left(\left(-e^{-a}\right) - \left(-e^0\right)\right) = 2e\left(1 - e^{-a}\right) \\
&= 2e - 2e^{1-a}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ \mathscr{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}.}$$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{1-a} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Par suite, $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2e - 2 \times 0 = 2e$.

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2e.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.