Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{1-x} = x \times e^1 \times e^{-x} = e \times x \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{x}{e^x}.$$

2) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) Limite de f en $+\infty$. D'après la question 1), pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = (1-x)e^{1-x}.}$$

5) Pour tout réel x, on a $e^{1-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

1) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x)\\ &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}\right)\\ &= 1 + \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - x^{n+1}\\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$$

2) Pour tout réel x, $h_n(x) = g_n'(x)$ et donc pour tout réel $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}h_n(x) &= \frac{\left(-(n+1)x^n\right)(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^1} + \frac{3}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^{n-1}} = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$= h_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$$

Pour tout entier naturel non nul n, $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2} \times ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$.

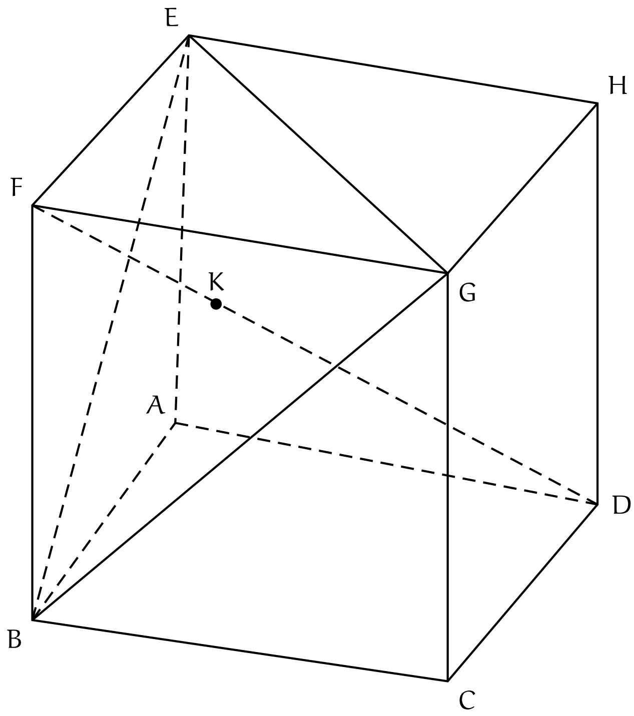
D'après la partie A, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2}f(n) = 0$.

De même, pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = (n+1)e^{1-(n+1)} = f(n+1)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{0 - 0 + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \left(\dfrac{e}{e-1}\right)^2$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2.}$$

EXERCICE 2



1) Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. La droite FD est la droite passant par $D(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}(1, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

2) Les points B, G et E ne sont pas alignés ou encore les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires. Donc, les points B, G et E définissent un unique plan à savoir le plan (BGE).
Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, -1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (BGE) est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x - y + z = 1$.

Une équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z = 1$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, -1, 1)$ et donc $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{n}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Soit $M(1 + t, -t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (FD).

$$M \in (BGE) \Leftrightarrow (1 + t) - (-t) + (1 + t) = 1 \Leftrightarrow 3t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Quand $t = -\frac{1}{3}$, on obtinent le point K de coordonnées $K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

4) La diagonale d'un carré de côté a, $a \in \mathbb{R}$, a une longueur égale à $a\sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore. Donc, $BE = BG = EG = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral.

La hauteur d'un traingle équilatéral de côté a, $a \in \mathbb{R}$ est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après le théorème de Pythagore. L'aire du triangle BEG est donc

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle BEG est égale à } \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

5) D'après les question précédentes, la droite (KD) est la hauteur issue de D du tétraèdre $BEGD$.

$$DK=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Le volume du tétraèdre $BEGD$ est $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle BEG à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h=DK=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre BEGD est égal à } \frac{1}{3}.}$$

EXERCICE 3

1) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

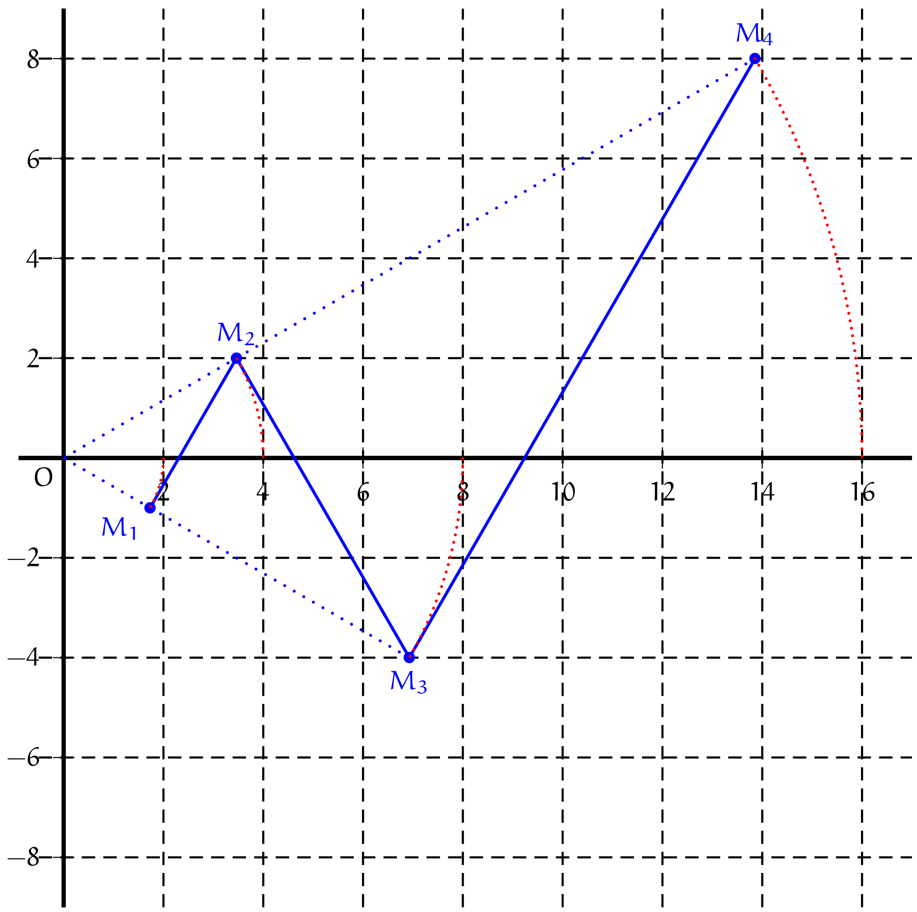
L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} - i$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont } \sqrt{3} + i \text{ et } \sqrt{3} - i.}$$

2) a) $z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$. Donc, z_1 est l'une des deux solutions de (E).

b) $z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3\frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.

c) Graphique. $|z_1| = 2$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 8$ et $|z_4| = 16$. Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont sur les cercles de centre O et de rayons respectifs 2, 4, 8 et 16.
Ensuite, z_1 et z_3 ont pour argument $-\dfrac{\pi}{6}$ ou encore $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. En particulier, les points O, M_1 et M_3 sont alignés. De même, les points O, M_2 et M_4 sont alignés.



3) Soit n un entier naturel non nul.

$$z_n = 2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right)\right).$$

• Si n est un entier pair, $(-1)^n = 1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

• Si n est un entier impair, $(-1)^n = -1$ puis

$$\cos\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

Dans tous les cas, $\cos\left(\dfrac{(-1)^n\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{(-1)^n\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{(-1)^n i}{2}$ et on a donc montré que pour tout entier naturel non nul n

$$z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}\right).$$

4) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$

et $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)-4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)\right| = \left|2\sqrt{3}-6i\right| = 2\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

5) a) La suite $\left(2^n\sqrt{3}\right)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique de premier terme $2\sqrt{3}$ et de raison $2 \neq 1$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\ell_n &= 2\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}+\ldots+2^n\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\times\frac{1-2^n}{1-2} \text{ (car } 2\neq 1)\\ &= 2\sqrt{3}\times\frac{2^n-1}{2-1} = 2\sqrt{3}\left(2^n-1\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\geqslant 1,\ \ell_n = 2\sqrt{3}\left(2^n-1\right).}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

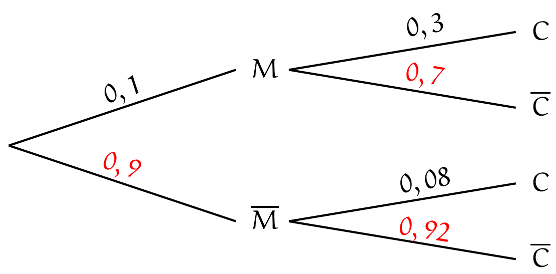
$$\begin{aligned}\ell_n \geqslant 1000 &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)\geqslant 1000 \Leftrightarrow 2^n - 1 \geqslant \frac{1000}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2^n \geqslant \frac{500}{\sqrt{3}}+1\\ &\Leftrightarrow \ln\left(2^n\right)\geqslant \ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\ &\Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right)\\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{500}{\sqrt{3}}+1\right)}{\ln 2} \text{ (car } \ln 2 > 0)\\ &\Leftrightarrow n \geqslant 8,1\ldots\\ &\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plus entier naturel } n \text{ tel que } \ell_n \geqslant 1\,000 \text{ est } 9.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



$$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) = P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C)$$
$$= 0,1 \times 0,3 + (1 - 0,1) \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102.$$

$$\boxed{P(C) = 0,102.}$$

2) La probabilité demandée est $P_C(M)$.

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} = \frac{30}{102} = \frac{15}{51} = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_C(M) = 0,2941 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie B

1) La taille de l'échantillon est suffisament petite par rapport à celle de la population pour que l'on puisse considérer les choix des quatre cents personnes de l'échantillon comme indépendants les uns des autres.

X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la personne choisie présente une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $p = 0,1$ et « la personne choisie ne présente pas une malformation cardiaque de type anévrisme » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2) La calculatrice fournit $P(X = 35) = 0,0491$ arrondi à 10^{-4}.

3) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 30)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 30) = 1 - p(X \leqslant 29) = 0,9643 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie C

1) Ici, $n = 400$ et $p = 0,1$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et que $n(1-p) = 360$ et donc que $n(1-p) \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,1 - 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}; 0,1 + 1,96\frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{400}}\right] = [0,0706; 0,1294].$$

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{60}{400} = 0,25$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. On peut en conclure que cet échantillon n'est pas représentatif de la population au risque de se tromper de 5 %.

