Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{1-x} = x \times e^1 \times e^{-x} = e \times x \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{x}{e^x}.$$

2) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) Limite de f en $+\infty$. D'après la question 1), pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = (1-x)e^{1-x}.}$$

5) Pour tout réel x, on a $e^{1-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

1) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x)\\ &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1}\right)\\ &= 1 + \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - \left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n\right) - x^{n+1}\\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$$

2) Pour tout réel x, $h_n(x) = g_n'(x)$ et donc pour tout réel $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}h_n(x) &= \frac{\left(-(n+1)x^n\right)(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 1,\ h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul

$$S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^1} + \frac{3}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^{n-1}} = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$= h_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$$

Pour tout entier naturel non nul n, $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2} \times ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$.

D'après la partie A, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2}f(n) = 0$.

De même, pour tout entier naturel non nul n, $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = (n+1)e^{1-(n+1)} = f(n+1)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{0 - 0 + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \left(\dfrac{e}{e-1}\right)^2$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.