

# Rochambeau 2012. Enseignement de spécialité

## EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $S$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = 5iz + 6i + 4.$$

### Partie A

On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $z$  et  $z'$ . Démontrer que

$$\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases} .$$

### Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  sont des entiers relatifs tels que

$$-3 \leq x \leq 5 \text{ et } -3 \leq y \leq 5.$$

On note  $(E)$  l'ensemble de ces points  $M$ .

On rappelle que les coordonnées  $(x', y')$  du point  $M'$ , image du point  $M$  par la transformation  $S$ , sont  $x' = -5y + 4$  et  $y' = 5x + 6$ .

1) a) Déterminer l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers relatifs tels que  $4a + 3b = 5$ .

b) En déduire l'ensemble des points  $M$  de  $(E)$  de coordonnées  $(x, y)$  tels que  $-3x' + 4y' = 37$ .

2) Soient  $M$  un point de l'ensemble  $(E)$  et  $M'$  son image par la transformation  $S$ .

a) Démontrer que  $x' + y'$  est un multiple de 5.

b) Démontrer que  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont congrus modulo 2.

En déduire que si  $x'^2 - y'^2$  est un multiple de 2 alors  $x' - y'$  et  $x' + y'$  le sont également.

c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $(E)$  tels que :  $x'^2 - y'^2 = 20$ .

# Rochambeau 2012. Enseignement de spécialité

## EXERCICE 4

### Partie A

Posons  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  où  $x, y, x'$  et  $y'$  sont quatre réels.

$$z' = 5iz + 6i + 4 = 5i(x + iy) + 6i + 4 = 5ix - 5y + 6i + 4 = (-5y + 4) + i(5x + 6).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}.$$

### Partie B

1) a) Notons  $(\mathcal{E})$  l'équation considérée. Puisque  $4 \times 2 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5$ , le couple  $(a_0, b_0) = (2, -1)$  est une solution particulière de l'équation  $(\mathcal{E})$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4a + 3b = 4a_0 + 3b_0 \Leftrightarrow 4(a - a_0) = 3(b_0 - b). \quad (*)$$

Si le couple  $(a, b)$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ , alors l'entier 3 divise  $3(b_0 - b) = 4(a - a_0)$ .

Puisque les entiers 3 et  $4 = 2^2$  sont premiers entre eux (car sans facteur premier commun), le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier 3 divise  $a - a_0$ .

De même, l'entier 4 divise  $b_0 - b$ . Par suite, il existe deux entiers relatifs  $k$  et  $k'$  tels que  $a - a_0 = 3k$  ou encore  $a = a_0 + 3k$  et  $b_0 - b = 4k'$  ou encore  $b = b_0 - 4k'$ .

Réciproquement, soient  $k$  et  $k'$  deux entiers relatifs puis  $a = a_0 + 3k$  et  $b = b_0 - 4k'$ .

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4(a_0 + 3k) + 3(b_0 - 4k') = 5 \Leftrightarrow 4a_0 + 3b_0 + 12(k - k') = 5 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples  $(a, b)$  d'entiers relatifs tels que  $4a + 3b = 5$  sont les couples de la forme  $(2 + 3k, -1 - 4k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

b) Soient  $x'$  et  $y'$  deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned} -3x' + 4y' = 37 &\Leftrightarrow -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 37 + 12 - 24 \\ &\Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 25 \Leftrightarrow 4x + 3y = 5 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = 2 + 3k \text{ et } y = -1 - 4k. \end{aligned}$$

Soit alors  $k$  un entier relatif.

$$-3 \leq 2 + 3k \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3k \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq k \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 1,$$

et

$$-3 \leq -1 - 4k \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq -4k \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{4} \leq k \leq \frac{2}{4} \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 0.$$

En résumé, le point  $M$  de coordonnées  $(2 + 3k, -1 - 4k)$  est un point de  $(E)$  si et seulement si  $k = -1$  ou  $k = 0$ . Si  $k = -1$ , on obtient le point de coordonnées  $(-1, 3)$  et si  $k = 0$ , on obtient le point de coordonnées  $(2, -1)$ .

Il existe exactement deux points de  $(E)$  tel que  $-3x' + 4y' = 37$  : les points de coordonnées  $(-1, 3)$  et  $(2, -1)$ .

2) a)  $x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = 5x - 5y + 10 = 5(x - y + 2)$ . Puisque  $x - y + 2$  est un entier relatif, ceci montre que  $x' + y'$  est un multiple de 5.

b)  $(x' + y') - (x' - y') = 2y'$  et donc  $(x' + y') - (x' - y') \equiv 0 \pmod{2}$  ou encore  $x' + y' \equiv x' - y' \pmod{2}$ .

Supposons que  $x'^2 - y'^2$  soit un multiple de 2.

Si  $x' - y' \not\equiv 0 \pmod{2}$  alors  $x' - y' \equiv 1 \pmod{2}$  puis  $x' + y' \equiv 1 \pmod{2}$  d'après la question précédente. Mais alors  $(x' - y')(x' + y') \equiv 1 \times 1 \pmod{2}$  ou encore  $x'^2 - y'^2 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Ceci est une contradiction et donc  $x' - y' \equiv 0 \pmod{2}$  puis  $x' + y' \equiv 0 \pmod{2}$  puisque  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont congrus modulo 2.

c) Soit  $M$  un point de  $(E)$  tel que  $x'^2 - y'^2 = 20$ . Alors,  $x' = -5y + 4$  et  $y' = 5x + 6$  sont deux entiers relatifs. Ensuite,  $x'^2 - y'^2$  est pair et donc  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont pairs d'après la question précédente. D'autre part,  $x' + y'$  est un multiple de 5 d'après la question a).

Puisque  $x' + y'$  est un multiple des nombres premiers 2 et de 5,  $x' + y'$  est un multiple de  $2 \times 5 = 10$ . En résumé,

- $(x' - y')(x' + y') = 20$
- $x' - y'$  est un entier relatif qui est un multiple de 2
- $x' + y'$  est un entier relatif qui est un multiple de 10.

Ceci ne laisse que deux possibilités :

- $x' - y' = 2$  et  $x' + y' = 10$  puis  $x' = \frac{10+2}{2} = 6$  et  $y' = \frac{10-2}{2} = 4$
- $x' - y' = -2$  et  $x' + y' = -10$  puis  $x' = \frac{-2-10}{2} = -6$  et  $y' = \frac{-10+2}{2} = -4$ .

Dans le premier cas,  $x = \frac{y' - 6}{5} = \frac{4 - 6}{5} = -\frac{2}{5}$  et  $x$  n'est pas un entier relatif.

Dans le deuxième cas,  $x = \frac{y' - 6}{5} = \frac{-4 - 6}{5} = -2$  et  $y = \frac{4 - x'}{5} = \frac{4 + 6}{5} = 2$ .

Réciproquement, le couple  $(x, y) = (-2, 2)$  est bien un élément de  $(E)$ . De plus, pour ce couple  $(x, y)$ , on a

$$(x', y') = (-5 \times 2 + 4, 5 \times (-2) + 6) = (-6, -4)$$

puis  $x'^2 - y'^2 = 36 - 16 = 20$ . Finalement,

il existe exactement un point de  $(E)$  tel que  $x'^2 - y'^2 = 20$  : le point de coordonnées  $(-2, 2)$ .