

Polynésie 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 1) Vérifier que le couple $(13, 3)$ est solution de cette équation.
- 2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation

$$25g - 108c = 1.$$

- 1) Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a [7]$ et $x \equiv a [19]$, alors $x \equiv a [133]$.
- 2) a) Vérifier que pour tout entier x tel que $1 \leq x \leq 6$, on a $x^6 \equiv 1 [7]$.
b) On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^{108} \equiv 1 [7]$.
En déduire que $(a^{25})^9 \equiv a [7]$.
c) On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $(a^{25})^9 \equiv a [7]$.
d) On admet que pour tout entier naturel a , $(a^{25})^9 \equiv a [19]$.
Démontrer que $(a^{25})^9 \equiv a [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A , est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A , l'entier r tel que $a^{25} \equiv r [133]$ avec $0 \leq r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1 [133]$ avec $0 \leq r_1 < 133$.

- 1) Justifier que $r_1 \equiv a [133]$.
- 2) Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.