Polynésie 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

On considère l'équation $(E) : 25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Vérifier que le couple $(13, 3)$ est solution de cette équation.

2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation

$$25g - 108c = 1.$$

1) Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.

2) a) Vérifier que pour tout entier x tel que $1 \leqslant x \leqslant 6$, on a $x^6 \equiv 1\ [7]$.

b) On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

c) On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

d) On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1) Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.

2) Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.

Polynésie 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4

Partie A

1) $25\times 13-108\times 3=325-324=1$. Donc le couple $(x_0,y_0)=(13,3)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). Notons alors que les entiers relatifs 25 et 108 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

2) Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs.

$$25x-108y=1\Leftrightarrow 25x-108y=25x_0-108y_0\Leftrightarrow 25(x-x_0)=108(y-y_0).$$

Ainsi, si (x,y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E), alors l'entier 108 divise l'entier $108(y-y_0)=25(x-x_0)$ et puisque 108 et 25 sont des entiers premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 108 divise $x-x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x-x_0=108k$ ou encore $x=x_0+108k$. De même, l'entier 25 divise $y-y_0$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $y-y_0=25k'$ ou encore $y=y_0+25k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x=x_0+108k$ et $y=y_0+25k'$.

$$\begin{aligned}25x-108y=1&\Leftrightarrow 25(x_0+108k)-108(y_0+25k')=1\Leftrightarrow 25x_0-108y_0+25\times 108\times(k-k')=1\\&\Leftrightarrow 25\times 108\times(k-k')=0\Leftrightarrow k=k'.\end{aligned}$$

Finalement,

les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(13+108k,3+25k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Partie B

1) Si $x\equiv a\ [7]$ et $x\equiv a\ [19]$, alors $x-a$ est divisible par les nombres premiers 7 et 19.
On sait alors que $x-a$ divisible par 7×19 c'est-à-dire 133. Finalement, $x-a$ est un multiple de 133 ou encore $x\equiv a\ [133]$.

2) a)

- $1^6=1$ et donc $1^6\equiv 1\ [7]$.
- $2^6=8^2$. Or, $8\equiv 1\ [7]$ et donc $8^2\equiv 1^2\ [7]$ ou encore $2^6\equiv 1\ [7]$.
- $3^6=9^3$. Or, $9\equiv 2\ [7]$ et donc $9^3\equiv 8\ [7]$ ou encore $3^6\equiv 1\ [7]$.
- $4\equiv -3\ [7]$. Or, $(-3)^6=3^6$ et donc $4^6\equiv 3^6\ [7]$ ou encore $4^6\equiv 1\ [7]$.
- De même, $5\equiv -2\ [7]$ et $6\equiv -1\ [7]$. Par suite, $5^6\equiv(-2)^6\ [7]$ et $6^6\equiv(-1)^6\ [7]$ ou encore $5^6\equiv 1\ [7]$ et $6^6\equiv 1\ [7]$.

On a montré que pour tout entier x tel que $1\leqslant x\leqslant 6$, $x^6\equiv 1\ [7]$.

b) On sait qu'un entier naturel est congru modulo au reste de la division euclidienne de cet entier par 7.
Soit a un entier naturel non multiple de 7. Le reste de la division euclidiennne de a par 7 n'est pas nul et donc il existe un entier x tel que $1\leqslant x\leqslant 6$ et $a\equiv x\ [7]$.

D'après la question précédente, on a $x^6\equiv 1\ [7]$ et on en déduit que $a^6\equiv 1\ [7]$.

On en déduit que $\left(a^6\right)^{18}\equiv 1^{18}\ [7]$ ou encore $a^{108}\equiv 1\ [7]$.

Ensuite, $\left(a^{25}\right)^g=a^{25g}=a^{1+108c}=a\times\left(a^{108}\right)^c$. Mais alors $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\times 1^c\ [7]$ ou encore $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [7]$.

c) Si a est un multiple de 7, alors $a\equiv 0\ [7]$ puis $\left(a^{25}\right)^g\equiv\left(0^{25}\right)^g\ [7]$ ou encore $\left(a^{25}\right)^g\equiv 0\ [7]$.

En résumé, si $a\equiv 0\ [7]$ et $\left(a^{25}\right)^g\equiv 0\ [7]$. En particulier, $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [7]$.

d) $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [7]$ et $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [19]$. D'après la question 1) de la partie B,

pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g\equiv a\ [133]$.

Partie C

1) $r_1\equiv r^{13}\ [133]$ et $r^{13}\equiv\left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$. Donc, $r_1\equiv\left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$.
D'autre part, le couple $(g,c)=(13,3)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) d'après la question 1) de la partie A.
Mais alors $\left(a^{25}\right)^{13}\equiv a\ [133]$ d'après la question 2)c) de la partie B.

En résumé, $r_1\equiv\left(a^{25}\right)^{13}\ [133]$ et $\left(a^{25}\right)^{13}\equiv a\ [133]$. On en déduit que

$r_1 \equiv a\ [133]$.

2) • $128^2 \equiv (-5)^2\ [133]$ ou encore $128^2 \equiv 25\ [133]$ puis $128^{12} \equiv 25^6\ [133]$.
$25^6 = 5^{12} = \left(5^3\right)^4 = 125^4$. Comme $125 \equiv -8\ [133]$, $128^{12} \equiv (-8)^4\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv 8^4\ [133]$.
$8^4 = 2^{12} = 2^7 \times 2^5 = 128 \times 32$ et donc $128^{12} \equiv -5 \times 32\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv -160\ [133]$ ou encore $128^{12} \equiv -160 + 133\ [133]$ ou enfin

$$128^{12} \equiv -27\ [133].$$

$128^{13} = 128^{12} \times 128$ et donc $128^{13} \equiv -27 \times -5\ [133]$ ou encore $128^{13} \equiv 135\ [133]$ ou enfin

$$128^{13} \equiv 2\ [133],$$

(avec $0 \leqslant 2 < 133$).

• $59^2 = 3481 = 23 + 26 \times 133$ et donc $59^2 \equiv 23\ [133]$ puis $59^{12} \equiv 23^6\ [133]$.
$23^2 = 529 = -3 + 4 \times 133$ et donc $23^2 \equiv -3\ [133]$ puis $59^{12} \equiv (-3)^3\ [133]$ ou encore $59^{12} \equiv -27\ [133]$.
Mais alors, $59^{13} \equiv -27 \times 59\ [133]$ ou encore $59^{13} \equiv -1593\ [133]$ ou encore $59^{13} \equiv -1593 + 12 \times 133\ [133]$ ou enfin $59^{13} \equiv 3\ [133]$ (avec $0 \leqslant 3 < 133$).

Le message qui a été codé est le message : 2 3.

