

Polynésie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

- 1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0$.
- $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\frac{1}{2}$.

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ 50a - 100a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ a = \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,01 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Donc,

pour tout réel x , $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,01x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{1}{e} \times xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Par suite, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0 = 0$. Finalement,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

4) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x , $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.

Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $] -100, +\infty[$, strictement négative sur $] -\infty, -100[$ et s'annule en -100 .

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-100	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-100e^{-2}$	$+\infty$

5) La position relative de Γ et de (D) est donnée par le signe de $f(x) - x$. Pour tout réel x ,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x(1 - e^{0,01x-1}).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} 1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01} \\ &\Leftrightarrow x < 100, \end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Détaillons alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$	0	100	$+\infty$
x		$-$	0	$+$
$1 - e^{0,01x-1}$		$-$	$-$	0
$f(x) - x$		$+$	0	$-$

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0, 0)$ et $B(100, 100)$.

6) a) F est dérivable sur $[0, 100]$ et pour tout x de $[0, 100]$,

$$F'(x) = ce^{0,01x-1} + (cx + d) \times 0,01e^{0,01x-1} = (0,01cx + c + 0,01d)e^{0,01x-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 100], F'(x) = xe^{0,01x-1} &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 100], (0,01cx + c + 0,01d)e^{0,01x-1} = xe^{0,01x-1} \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 100], 0,01cx + c + 0,01d = x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,01c = 1 \\ c + 0,01d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 100 \\ d = -10000 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de la fonction f sur $[0, 100]$ est la fonction $x \mapsto (100x - 10000)e^{0,01x-1}$.

b) On en déduit que

$$\int_0^{100} f(t) dt = [(100t - 10000)e^{0,01t-1}]_0^{100} = 0 - (-10000)e^{-1} = \frac{10000}{e}.$$

c) D'après la question 5), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0, 100]$. Donc,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{100} (t - f(t)) dt = \int_0^{100} t dt - \int_0^{100} f(t) dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e} \\ &= \frac{5000(e-2)}{e}. \end{aligned}$$

$$A = \frac{5000(e-2)}{e}.$$

