Polynésie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On considère les points $B(100; 100)$ et $C\left(50; \dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ, est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :
- pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1) a) Montrer que le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

b) En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) a) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.
b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

4) Étudier les variations de la fonction f. On donnera le tableau de variations complet.

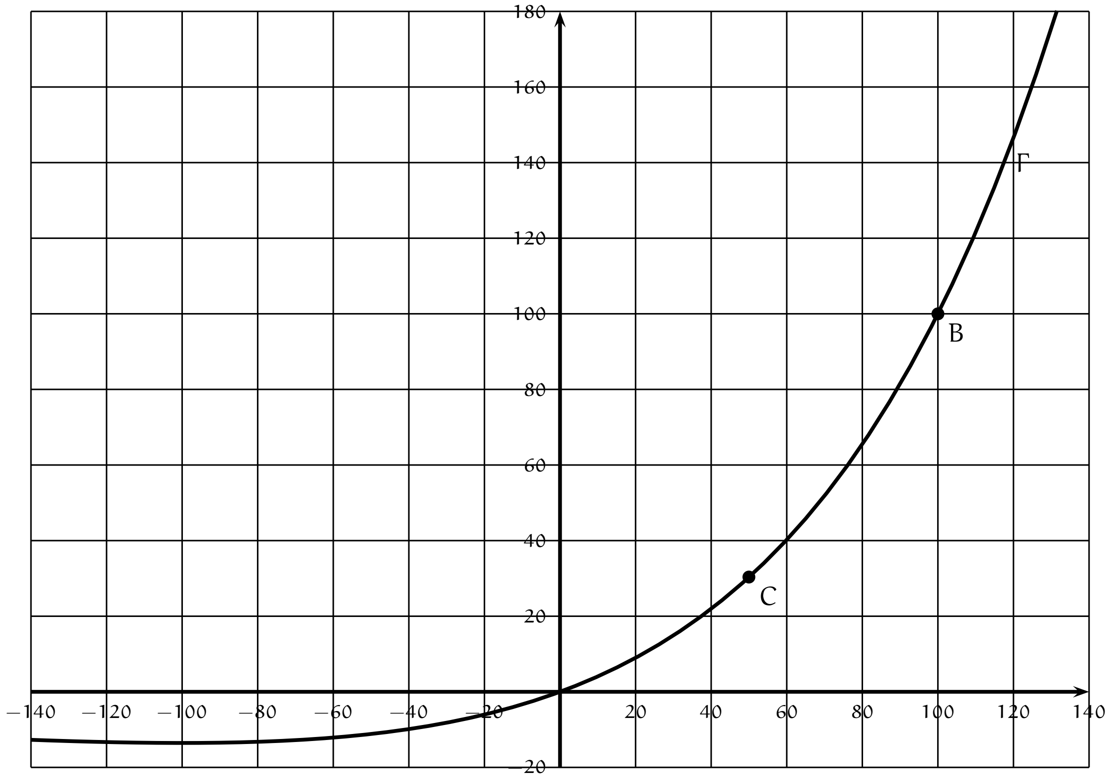
5) Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

6) a) Déterminer une primitive de la fonction f sur $[0, 100]$ de la forme $F\ :\ x \mapsto (cx + d)e^{0,01x-1}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\ dt$.

c) On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ. Calculer A.

Annexe de l'exercice 1



Polynésie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0$.

• $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\dfrac{1}{2}$.

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ 50a - 100a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ a = \dfrac{1}{100} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0,01 \\ b = -1 \end{array}\right. .$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = xe^{0,01x-1}.}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0,01x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{1}{e} \times xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \dfrac{100}{e} \times 0 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x, $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.

Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]-100, +\infty[$, strictement négative sur $]-\infty, -100[$ et s'annule en -100.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-100e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) La position relative de Γ et de (D) est donnée par le signe de $f(x) - x$. Pour tout réel x,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x\left(1 - e^{0,01x-1}\right).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01} \\ &\Leftrightarrow x < 100, \end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Détaillons alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-e^{0,01x-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0, 0)$ et $B(100, 100)$.

6) a) F est dérivable sur $[0, 100]$ et pour tout x de $[0, 100]$,

$$F'(x) = ce^{0,01x-1} + (cx+d)\times 0,01e^{0,01x-1} = (0,01cx + c + 0,01d)e^{0,01x-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,100],\ F'(x) = xe^{0,01x-1} &\Leftrightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0,100],\ (0,01cx + c + 0,01d)e^{0,01x-1} = xe^{0,01x-1}\\
&\Leftarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0,100],\ 0,01cx + c + 0,01d = x\\
&\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} 0,01c = 1\\ c + 0,01d = 0\end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} c = 100\\ d = -10000\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de la fonction f sur $[0, 100]$ est la fonction $x \mapsto (100x - 10000)e^{0,01x-1}$.

b) On en déduit que

$$\int_0^{100} f(t)\,dt = \left[(100t - 10000)e^{0,01t-1}\right]_0^{100} = 0 - (-10000)e^{-1} = \frac{10000}{e}.$$

c) D'après la question 5), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0, 100]$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{100} (t - f(t))\,dt = \int_0^{100} t\,dt - \int_0^{100} f(t)\,dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e}\\
&= \frac{5000(e-2)}{e}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{5000(e-2)}{e}.}$$