

Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^x$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

Sur la courbe \mathcal{C} , tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1 . On a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe \mathcal{C} . On a placé les points $A'(a; 0)$ et $B'(1; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1) a) Soient a et b deux réels. Pour tout réel x , on pose $F(x) = (ax + b)e^x$.

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F soit une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} .

b) En déduire que $\int_0^1 xe^x dx = 1$.

2) a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e)$.

b) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est $\frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = x(e^x - e) + e - 2.$$

1) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.

Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par $g''(x) = (2 + x)e^x$.

2) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.

3) Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4) En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

5) En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a .

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE

