Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1) a) Soient a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $F(x) = (ax + b)e^x$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction F soit une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx = 1$.

2) a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.

b) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = x(e^x - e) + e - 2.$$

1) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;+\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x) = (2 + x)e^x$.

2) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0;+\infty[$.

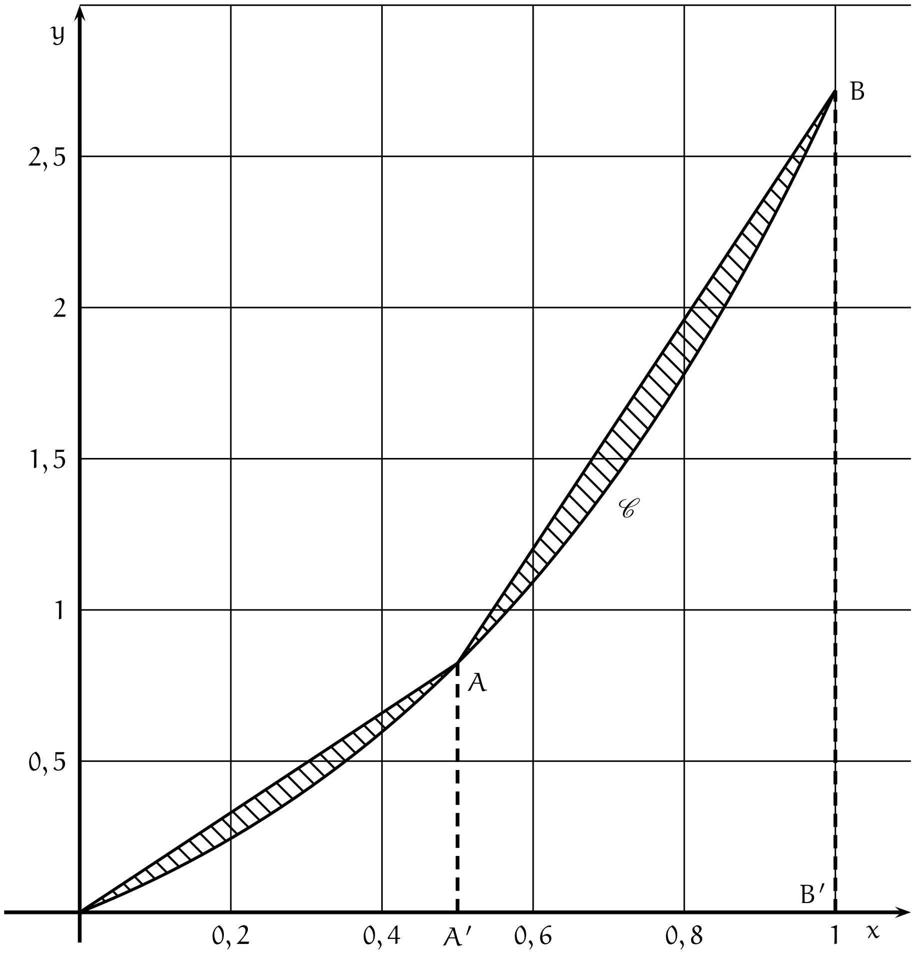
3) Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4) En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

5) En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE



Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

PARTIE A

1) a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
F \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto xe^x \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ (ax+a+b)e^x = xe^x \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ ax+a+b = x \\
&\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ a+b=0 \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^x$ est donc la fonction $F\ :\ x \mapsto (x-1)e^x$.

b) On en déduit que

$$\int_0^1 xe^x\ dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1.$$

$$\boxed{\int_0^1 xe^x\ dx = 1.}$$

2) a) L'aire du triangle OAA' est

$$\text{aire de}(OAA') = \frac{OA' \times AA'}{2} = \frac{a \times ae^a}{2} = \frac{1}{2}a^2e^a.$$

L'aire du trapèze $ABB'A'$ est

$$\text{aire de}(ABB'A') = \frac{(AA'+BB') \times A'B'}{2} = \frac{(ae^a+e)(1-a)}{2} = \frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e).$$

b) La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire et notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan comprise l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ d'autre part est $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ c'est-à-dire 1 d'après la question 1.

D'après le graphique fourni en annexe, l'aire de la partie du plan hachurée, exprimée en unités d'aire est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= \text{aire de}(OAA') + \text{aire de}(ABB'A') - \mathscr{A} = \frac{1}{2}a^2e^a + \frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(a^2e^a - a^2e^a + ae^a - ae + e - 2) = \frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire, exprimée en unités d'aire, de la zone hachurée est } \frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2).}$$

PARTIE B

1) La fonction $x \mapsto x(e^x - e)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. Mais alors, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = (e^x - e) + x(e^x) + 0 = xe^x + e^x - e.$$

De nouveau la fonction g' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g''(x) = 1 \times e^x + xe^x + e^x = (2+x)e^x.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ g''(x) = (2+x)e^x.}$$

2) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x+2>0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g''(x) > 0$. Mais alors, la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) • $g'(0) = (2+0)e^0 = 2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - e = +\infty$ et en additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$.

• La fonction g' est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

On sait alors que pour tout réel k de $\left[g'(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)\right[= [1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, puisque $1-e<0$ et donc que 0 appartient à $[1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[0,+\infty[$.

La calculatrice fournit $g'(0,5) = -0,2\ldots < 0$ et $g'(0,6) = 0,1\ldots > 0$. Ainsi, $g'(0,5) < g'(\alpha) < g'(0,6)$ et donc, puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $0,5 < \alpha < 0,6$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 0,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$$

4) Puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $g'(x) < g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g'(x) > g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $[0,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

5) En particulier, la fonction g admet un minimum en α avec $\alpha \in [0,1]$. D'après la question 2)b) de la partie A, pour tout $a \in [0,1]$, l'aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{g(a)}{2}$. La question précédente permet d'affirmer que cette aire est minimale quand $a = \alpha$.

