

Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}.$$

- 1) Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

- 1) Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
- 2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
- 3) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 4) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C = -1 - i$ et $z_D = -1 + i$.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1)

$$\begin{aligned}P(z_0) &= (i\sqrt{2})^3 - (2 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} \\ &= -2i\sqrt{2} + 2(2 + i\sqrt{2}) + 2(i\sqrt{2} - 2) - 2i\sqrt{2} \\ &= -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0\end{aligned}$$

Donc $P(z_0) = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. Pour tout nombre complexe z ,

$$\begin{aligned}(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2} \\ &= z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ia\sqrt{2})z - ib\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Si on choisit les réels a et b tels que $\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2 + i\sqrt{2}) \\ b - ia\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases}$, alors pour tout nombre complexe z on aura

$(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = P(z)$. Or,

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2 + i\sqrt{2}) \\ b - ia\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b + 2i\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Donc

$$\text{pour tout nombre complexe } z, P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2).$$

b) Soit z un nombre complexe.

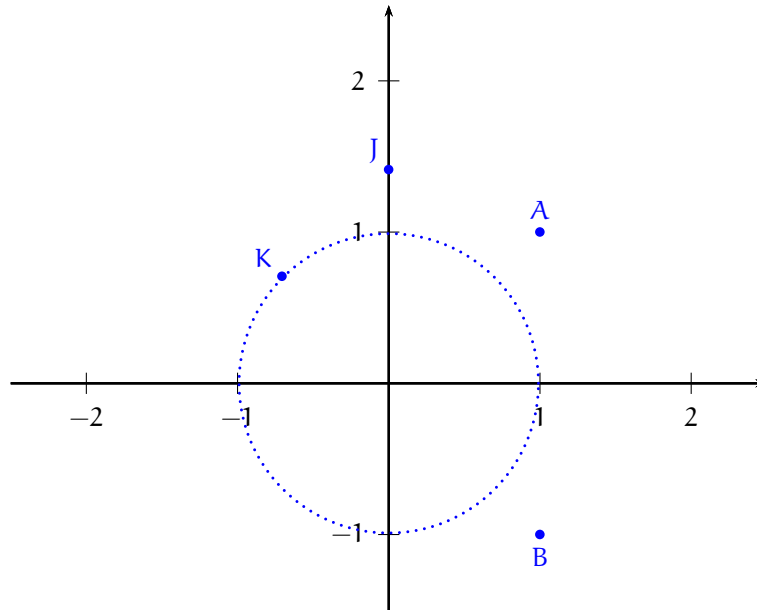
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Donc l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1-i$.

$$\text{Pour tout nombre complexe } z, P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{i\sqrt{2}, 1+i, 1-i\}.$$

Partie B

1)



$$2) z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

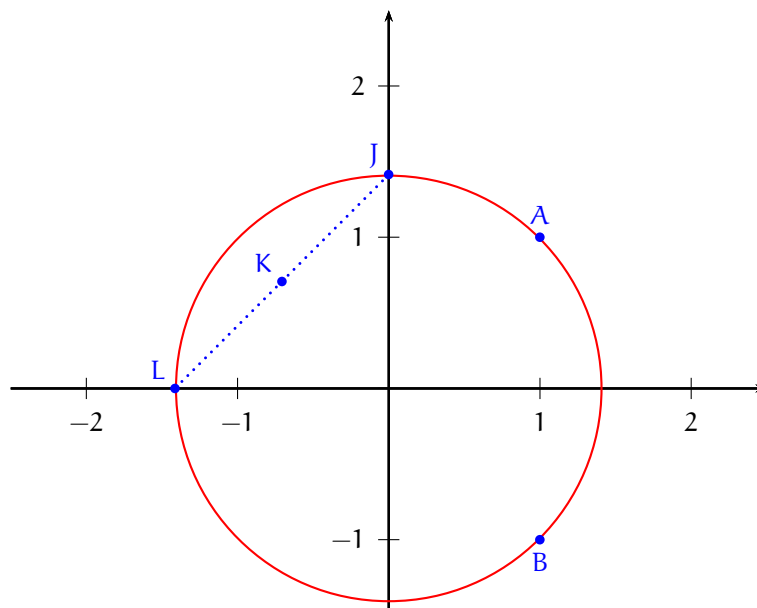
Le point K est le milieu du segment [JL]. Par suite, $\frac{z_L + z_J}{2} = z_K$ puis

$$z_L = 2z_K - z_J = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

$$z_L = -\sqrt{2}.$$

- 3) • $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
 • $OB = |z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$
 • $OJ = |z_J| = \sqrt{2} |i| = \sqrt{2}.$
 • $OL = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$

Les points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.



- 4) • $z_C = -z_A$ et donc O est le milieu du segment [AC]. De même, $z_D = -z_B$ et donc O est le milieu du segment [BD].

Ainsi, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu et donc ABCD est un parallélogramme.

• Le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-2, -2)$ et le vecteur \overrightarrow{BD} a pour coordonnées $(-2, 2)$.
 Par suite, $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ et $BD = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. En particulier, $AC = BD$. D'autre part,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-2) \times (-2) + (-2) \times 2 = 0,$$

et donc $(AC) \perp (BD)$. En résumé, les diagonales du parallélogramme ABCD sont perpendiculaires et ont même longueur. On en déduit que

le quadrilatère ABCD est un carré.

