Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer successivement avec remise de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

1) Calculer $p_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé.
Calculer de même les probabilités $p_{J_2}(B)$, $p_{J_3}(B)$ et $p_{J_4}(B)$.

2) Montrer que $p(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\dfrac{203}{1250}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3) On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4) On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N ?

b) Calculer la probabilité de l'événement $(N = 3)$.

Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

1) Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2. Puisque l'urne U_2 contient 10 boules dont 4, sont blanches,

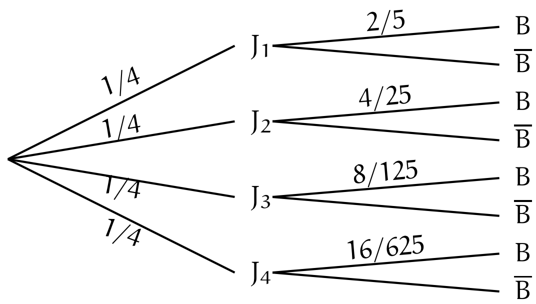
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer successivement avec remise deux boules de l'urne U_2. A chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{2}{5}$. Donc, $p_{J_2}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

De même, $p_{J_3}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$ et $p_{J_4}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$.

$$\boxed{p_{J_1}(B) = \frac{2}{5},\ p_{J_2}(B) = \frac{4}{25},\ p_{J_3}(B) = \frac{8}{125} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{16}{625}.}$$

2) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
p(B) &= p(J_1) \times p_{J_1}(B) + p(J_2) \times p_{J_2}(B) + p(J_3) \times p_{J_3}(B) + p(J_4) \times p_{J_4}(B) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \frac{16}{625}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8}{625}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{125 + 50 + 20 + 8}{625} \\
&= \frac{203}{1250}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{203}{1250}.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3) \times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{8}{125}}{\frac{203}{1250}} = \frac{2}{125} \times \frac{1250}{203} = \frac{20}{203}.$$

$$\boxed{p_B(J_3) = \frac{20}{203}.}$$

4) a) La variable aléatoire N est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{203}{1250}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{1047}{1250}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{203}{1250}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{203}{1250}\right)^k \left(\frac{1047}{1250}\right)^{10-k}.$$

b) La calculatrice fournit

$$p(N = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{203}{1250}\right)^3 \left(\frac{1047}{1250}\right)^7 = 0,148\ldots,$$

et donc

$$\boxed{p(N = 3) = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

