

# Liban 2012. Enseignement spécifique

## EXERCICE 1

### Partie A

1) La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$ . De plus, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $g'(x)$  est strictement positif. Par suite,

la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

2) •  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x^3 - 1) = -1$  et on sait d'autre part que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  et donc que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x = -\infty$ . En additionnant, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty.$$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$  et on sait d'autre part que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln x = +\infty$ . En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

• La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . On sait alors que pour tout réel  $k$  de l'intervalle  $\left] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[$ , l'équation  $g(x) = k$  admet une solution et une seule dans  $]0, +\infty[$ . En particulier, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , dans  $]0, +\infty[$ .

La calculatrice fournit  $g(0,864) = -0,002\dots < 0$  et  $g(0,865) = 0,004\dots > 0$ . Ainsi,  $g(0,864) < g(\alpha) < g(0,865)$ . Puisque la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , on en déduit que  $0,864 < \alpha < 0,865$  puis que

$\alpha = 0,86$  arrondi au centième.

3) Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Si  $x < \alpha$ , alors  $g(x) < g(\alpha)$  puisque la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  ou encore  $g(x) < 0$  et si  $x > \alpha$ , alors  $g(x) > g(\alpha)$  ou encore  $g(x) > 0$ . On a ainsi montré que

la fonction  $g$  est strictement négative sur  $]0, \alpha[$ , strictement positive sur  $]\alpha, +\infty[$  et s'annule en  $\alpha$ .

### Partie B

1) • **Limite en 0.** Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \times \ln x$ . On sait que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ . En multipliant, on obtient  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$  puis  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$ . Comme d'autre part,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x = 0$ , en additionnant on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

• **Limite en  $+\infty$ .** Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ . D'après un théorème de croissances comparées, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . En multipliant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ . On a aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ . En retranchant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2) Soit  $x > 0$ . Soient  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de  $\Delta$  de même abscisse  $x$ .

$$y_M - y_N = f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

• Si  $x > 1$ ,  $\ln x > 0$  et donc  $y_M - y_N < 0$ . On en déduit que la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessous de la droite  $\Delta$  sur  $]1, +\infty[$ .

• Si  $x < 1$ ,  $\ln x < 0$  et donc  $y_M - y_N > 0$ . On en déduit que la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessus de la droite  $\Delta$  sur  $]0, 1[$ .

• Enfin, si  $x = 1$ ,  $y_M = y_N = 2$ . La courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$  se coupent au point de coordonnées  $(1, 2)$ .

3) La fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ . Mais alors la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que différence de deux fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$ ,

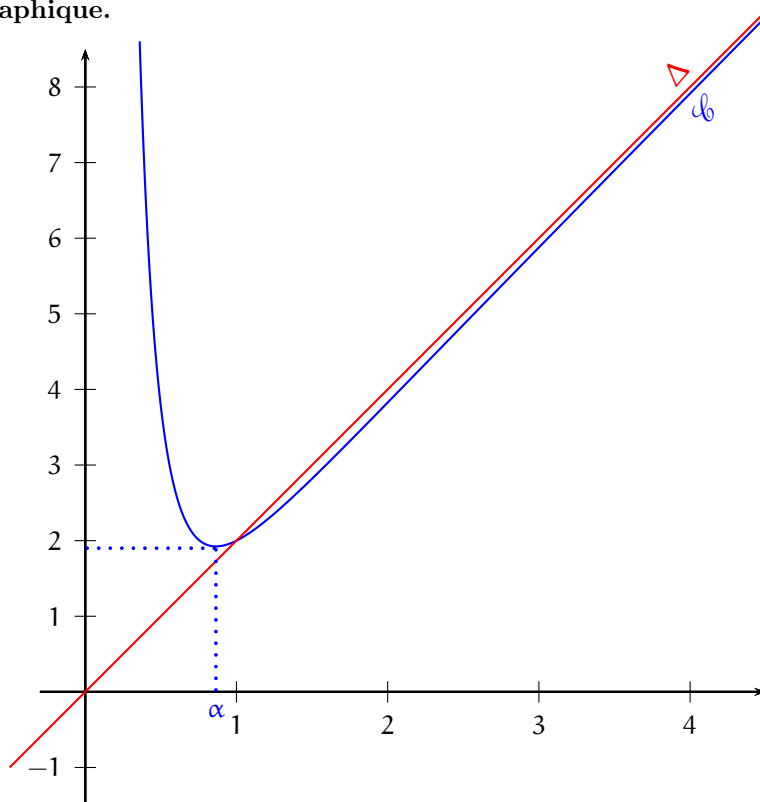
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 2 - \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme pour tout réel  $x > 0$ , on a  $x^3 > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x > 0$ .

4) Le signe de la fonction  $g$  a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction  $f$  :

$x$	0		$\alpha$		$+\infty$
$g'(x)$			-	0	+
$f$		$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$

5) Représentation graphique.



### Partie C

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 2) de la partie B, la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessous de la droite  $\Delta$  sur  $[1, +\infty[$  et en particulier sur  $[1, n]$ . Puisque la fonction  $f$  et la fonction  $x \mapsto 2x$  sont continues sur  $[1, n]$ , on sait que l'aire, exprimée

en unités d'aire, du domaine considéré est  $\int_1^n (2x - f(x)) dx$  ou encore  $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

Maintenant, une unité d'aire est égale à  $2 \times 1 = 2 \text{ cm}^2$  et donc l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine considéré est

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2) a) La fonction  $F$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et pour tout réel  $x \geq 1$ ,

$$F'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1 - \ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1 + \ln(x) + 1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Donc, la fonction  $F : x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$  sur  $[1, +\infty[$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = 2 \left[ -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^n = 2 \left( -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(1)}{1} + \frac{1}{1} \right) = 2 \left( 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} \right)$$

Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n = 2 \left( 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} \right)$ .

3) On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ . Par suite,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2.$