Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = 2x$.

3) Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1) Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

2) a) Vérifier que la fonction $F\ :\ x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est strictement positif. Par suite,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

2) • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2x^3 - 1) = -1$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2\ln x = -\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty.$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

• La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, +\infty[$.

La calculatrice fournit $g(0,864) = -0,002\ldots < 0$ et $g(0,865) = 0,004\ldots > 0$. Ainsi, $g(0,864) < g(\alpha) < g(0,865)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $0,864 < \alpha < 0,865$ puis que

$$\boxed{\alpha = 0,86 \text{ arrondi au centième.}}$$

3) Soit $x \in]0, +\infty[$. Si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha)$ puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$. On a ainsi montré que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement négative sur }]0, \alpha[, \text{ strictement positive sur }]\alpha, +\infty[\text{ et s'annule en } \alpha.}$$

Partie B

1) • **Limite en 0.** Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times \ln x$. On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\dfrac{\ln x}{x^2} = +\infty$. Comme d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2x = 0$, en additionnant on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.}$$

• **Limite en $+\infty$.** Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.
On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. En retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) Soit $x > 0$. Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse x.

$$y_M - y_N = f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

• Si $x > 1$, $\ln x > 0$ et donc $y_M - y_N < 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de la droite Δ sur $]1, +\infty[$.

• Si $x < 1$, $\ln x < 0$ et donc $y_M - y_N > 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de la droite Δ sur $]0, 1[$.

• Enfin, si $x = 1$, $y_M = y_N = 2$. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ se coupent au point de coordonnées $(1, 2)$.

3) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

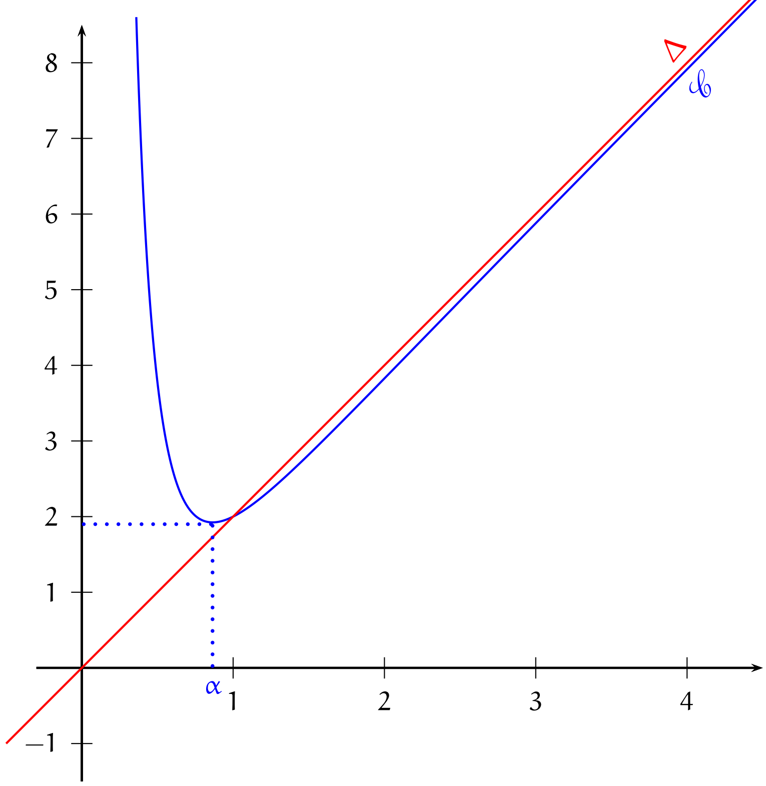
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = 2 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.

4) Le signe de la fonction g a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) Représentation graphique.



Partie C

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2) de la partie B, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur $[1, +\infty[$ et en particulier sur $[1, n]$. Puisque la fonction f et la fonction $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[1, n]$, on sait que l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine considéré est $\displaystyle\int_1^n (2x - f(x))\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
Maintenant, une unité d'aire est égale à $2 \times 1 = 2$ cm^2 et donc l'aire, exprimée en cm^2, du domaine considéré est

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

2) a) La fonction F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$F'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1+\ln(x)+1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Donc, la fonction $F\ :\ x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 2\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^n = 2\left(-\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(1)}{1} + \frac{1}{1}\right) = 2\left(1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n = 2\left(1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right).}$$

3) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.}$$

