France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

3) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2) Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3) Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n).$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.