France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

3) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2) Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3) Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n).$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

Partie A

1) La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{X\to1}\ln(X)=\ln(1)=0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

2) La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1}>0$. On sait alors que la fonction $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$. D'autre part, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

1er calcul :

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'}{\dfrac{x}{x+1}}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x}\times\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}\\&=\frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

2ème calcul :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\frac{1}{x+1}\right)'+(\ln(x))'-(\ln(x+1))'=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x+(x+1)^2-x(x+1)}{x(x+1)^2}\\&=\frac{-x+x^2+2x+1-x^2-x}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $f'(x)>0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Mais alors, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a $f(x)<\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$ ou encore $f(x)<0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement négative sur } [1,+\infty[.}$$

Partie B

1)
- Initialisation : $u=0$.
- Etape 1 : $i=1$ puis $u=0+\dfrac{1}{1}=1$.
- Etape 2 : $i=2$ puis $u=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
- Etape 3 : $i=3$ puis $u=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$.

Si $n=3$, la valeur exacte affichée par l'algorithme est $\dfrac{13}{6}$.

2)

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher $u-\ln(n)$

3) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente de limite approximativement égale à $0,57$.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=f(n).\end{aligned}$$

D'après la question 3) de la partie A, le fonction f est strictement négative sur $[1,+\infty[$. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n)<0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1}-u_n<0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$$

2) a) Soit k un entier strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{1}{k}-\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et en particulier sur $[k,k+1]$. Donc l'intégrale $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx$ existe.

Pour tout réel x de l'intervalle $[k,k+1]$, on a $x \geqslant k > 0$ puis $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$) et donc $\frac{1}{k}-\frac{1}{x} \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x de $[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k}-\frac{1}{x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx \geqslant 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a alors

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{k}\times(k+1-k)-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

Par suite, $\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \geqslant 0$ ou encore $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Enfin, $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=[\ln(x)]_k^{k+1}=\ln(k+1)-\ln k$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ strictement positif, } \ln(k+1)-\ln k \leqslant \frac{1}{k}\quad (1).}$$

b) Soit n un entier strictement positif. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{lcl}\ln(2)-\ln(1) & \leqslant & 1\\ \ln(3)-\ln(2) & \leqslant & \frac{1}{2}\\ \ln(4)-\ln(3) & \leqslant & \frac{1}{3}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \ln(n-1)-\ln(n-2) & \leqslant & \frac{1}{n-2}\\ \ln(n)-\ln(n-1) & \leqslant & \frac{1}{n-1}\\ \ln(n+1)-\ln(n) & \leqslant & \frac{1}{n}\end{array}$$

On additionne membre à membre ces n inégalités. Dans le premier membre, les nombres $\ln(2)$, $\ln(3)$, ..., $\ln(n-1)$ et $\ln(n)$ se simplifient et il reste $-\ln(1)+\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On retranche $\ln(n)$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente et on obtient

$$\ln(n+1)-\ln(n) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$$

ou encore

$$u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n).$$

Par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, on a $\ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ puis $\ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$.
Par suite, $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier strictement positif } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

3) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante d'après la question 1) et minorée par 0 d'après la question 2). On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

