France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

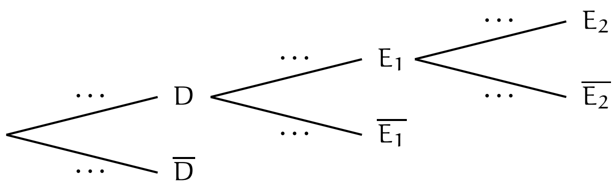
Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante.
Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1) On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
E_2 : « Le candidat est recruté ».

a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c) On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

2) Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

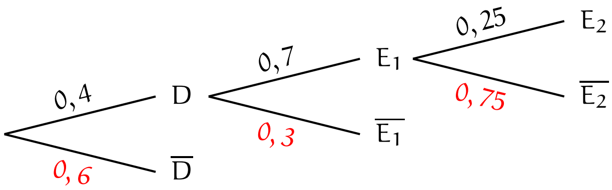
b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3) Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

$$\boxed{p(E_1) = 0,28.}$$

c) 1ère solution. L'événement F est la réunion des trois événements $\overline{D}$, $\overline{E_1}$ et $\overline{E_2}$. De plus, ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc,

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right).$$

- $p\left(\overline{D}\right) = 1 - p(D) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- $p\left(\overline{E_1}\right) = p(D) \times p_D\left(\overline{E_1}\right) = 0,4 \times (1 - 0,7) = 0,12$.
- $p\left(\overline{E_2}\right) = p(E_1) \times p_{E_1}\left(\overline{E_2}\right) = 0,28 \times (1 - 0,25) = 0,21$.

$$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(\overline{E_1}\right) + p\left(\overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93.$$

2ème solution. L'événement $\overline{F}$ c'est-à-dire l'événement « le candidat est recruté » est encore l'événement E_2. Donc,

$$p\left(\overline{F}\right) = p(E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) = 0,28 \times 0,25 = 0,07$$

puis $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

$$\boxed{p(F) = 0,93.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candidat est recruté » avec une probabilité $p = 0,07$ ou « le candidat n'est pas recruté » avec une probabilité $1 - p = 0,93$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

b) On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$,

$$p(X = k) = \binom{5}{k} (0,07)^k (0,93)^{5-k}.$$

La probabilité demandée est $p(X = 2)$. La calculatrice fournit

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} (0,07)^2 (0,93)^3 = 0,0394\ldots,$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est } 0,039 \text{ arrondie à } 10^{-3}.}$$

3) Soit n le nombre de dossiers examinés par le cabinet de recrutement. On note toujours X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les n candidats. La probabilité d'embaucher au moins un candidat est $p(X \geqslant 1)$.

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,07)^0(0,93)^n = 1 - (0,93)^n.$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1-(0,93)^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow (0,93)^n \leqslant 0,001 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,93)^n\right) \leqslant \ln(0,001) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \text{ (car } \ln(0,93) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 95,1\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 96 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}
$$

Le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$ est 96.

