

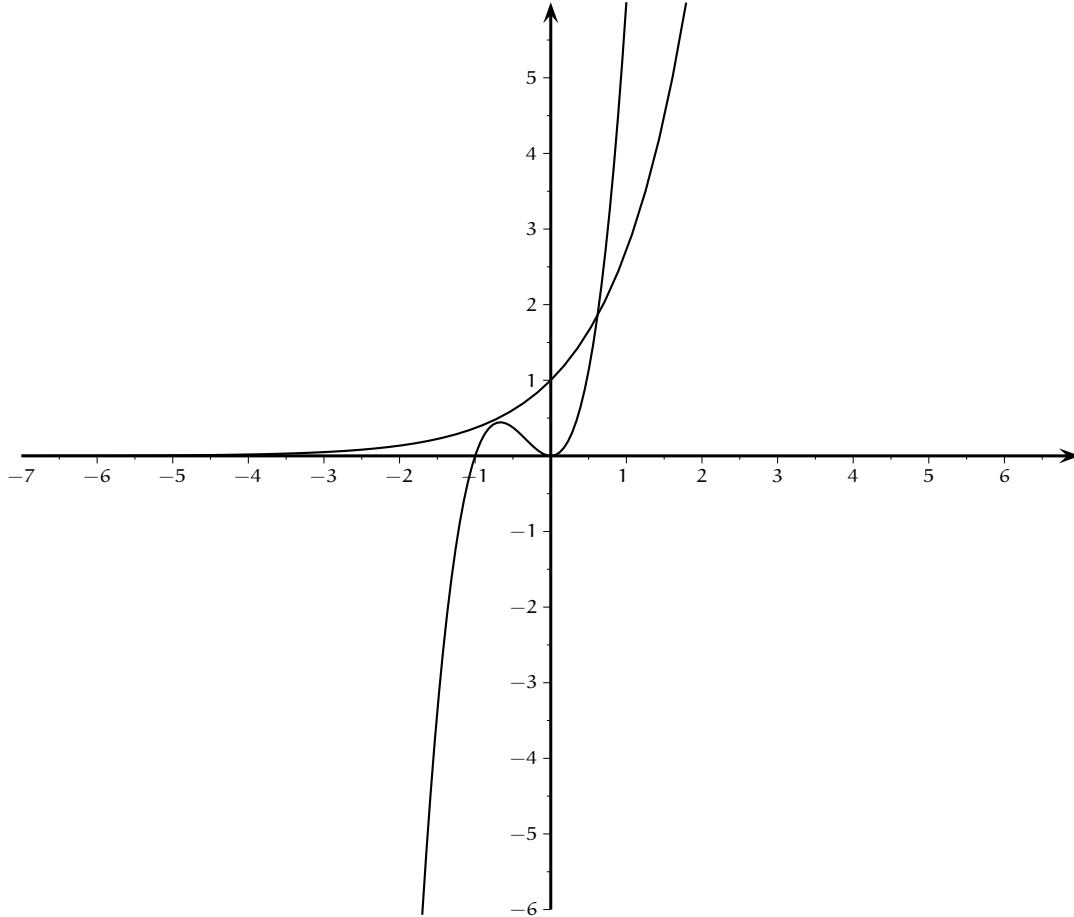
Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

- 1) a) Étudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$.
b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.
c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
- 2) On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

- 3) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

- b) Déterminer les variations de la fonction h .
- c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
- d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A : conjecture graphique

Il semblerait d'après le graphique que l'équation $h(x) = 0$ admette une solution et une seule et que cette solution appartienne à $[0, 1]$.

Partie B

1) a) Pour tout réel x , $x^2 + x^3 = x^2(x + 1)$. Par suite, pour tout réel x de $] -\infty, -1[$, $x^2 + x^3 < 0$ puis pour tout réel x de $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$, $x^2 + x^3 > 0$ et enfin pour $x \in \{-1, 0\}$, $x^2 + x^3 = 0$.

b) Soit x un réel de $] -\infty, -1[$. $e^x > 0$ et $3(x^2 + x^3) \leq 0$ et en particulier $e^x \neq 3(x^2 + x^3)$. Finalement

l'équation (E) n'a pas de solution dans $] -\infty, -1[$.

c) $e^0 = 1 \neq 0 = 3(0^2 + 0^3)$. Donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2) Soit $x \in] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$. Alors $x^2 + x^3 > 0$ puis

$$e^x = 3(x^2 + x^3) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3(x^2 + x^3)) \Leftrightarrow x = \ln(3x^2(1 + x)) \Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) \\ \Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0.$$

3) a) Pour tout réel x de $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$,

$$h'(x) = 0 + \frac{(x^2)'}{x^2} + \frac{(x+1)'}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)} \\ = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

Pour tout réel x de $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$, $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$.

b) Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x + 2$ est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 12.$$

Le trinôme $-x^2 + 2x + 2$ admet donc deux racines, les deux nombres $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

On note que $x_1 = -0,7\dots$ et $x_2 = 2,7\dots$ de sorte que $-1 < x_1 < 0 < x_2$. Le signe d'un trinôme du second degré étant connu, on peut détailler le signe de $h'(x)$ dans un tableau de signes :

x	-1	1 - √3	0	1 + √3	+∞			
$-x^2 + 2x + 2$	-	0	+	+	0	-		
x	-	-	0	+	+			
x + 1	0	+	+	+	+			
h'(x)		+	0	-		+	0	-

On en déduit encore le tableau de variations de la fonction h :

x	-1	1 - √3	0	1 + √3	+∞			
h'(x)		+	0	-		+	0	-
h		↘ 0 ↗				↘ 0 ↗		

La calculatrice fournit $h(1 - \sqrt{3}) = -0,1\dots < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) = 1,6\dots > 0$.

c) Sur l'intervalle $] -1, 0[$, la fonction h admet un maximum strictement négatif. Par suite, pour tout réel x de $] -1, 0[$, $h(x) < 0$ et en particulier pour tout réel x de $] -1, 0[$, $h(x) \neq 0$. Donc l'équation (E) n'a pas de solution dans $] -1, 0[$.

La calculatrice fournit encore $h(0,5) = -0,3\dots < 0$. Comme la fonction h est strictement croissante sur $]0; 0,5]$, on en déduit que pour tout réel x de $]0; 0,5]$, $h(x) < 0$ et en particulier, pour tout réel x de $]0; 0,5]$, $h(x) \neq 0$.

D'autre part, la fonction h est continue et strictement croissante sur $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. On sait alors que pour tout réel k de $[h(0,5), h(1 + \sqrt{3})]$, l'équation $h(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. Comme $h(0,5) < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $[h(0,5), h(1 + \sqrt{3})]$ et donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α , dans $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. La calculatrice fournit $h(0,615) = -0,009\dots < 0$ et $h(0,62) = 0,004\dots > 0$. Donc $0,615 < \alpha < 0,62$ puis $\alpha = 0,62$ arrondi au centième.

De même, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée β , dans $[1 + \sqrt{3}, +\infty[$ car par exemple $h(10) = -1,8\dots < 0$.

La calculatrice fournit $h(7,115) = 0,001\dots > 0$ et $h(7,12) = -0,001\dots < 0$. Donc $7,115 < \beta < 7,12$ puis $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

L'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha = 0,62$ arrondi au centième et $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

d) La conjecture émise dans la partie A était donc fausse. La solution β n'apparaissait pas sur le graphique fourni. Néanmoins cette solution était prévisible car un théorème de croissances comparées montre que le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ est au-dessus du graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$ quand le réel positif x est grand et donc le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ devait recouper au moins une fois le graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$.