Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches.
Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1) Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p = 0,42$.

2) Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1) a) Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2) On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

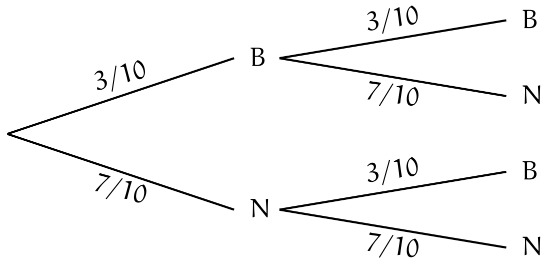
Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche » (de sorte que l'événement B est l'événement $\overline{N}$).

Représentons la situation par un arbre :



Les deux boules sont de couleurs différentes si et seulement si la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche ou la première est blanche et la deuxième est noire.

La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candidat gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times (0,42)^0 \times (0,58)^n = 1 - (0,58)^n.$

En particulier, $p_{10} = 1 - (0,58)^{10} = 0,996$ arrondie au millième.

c) Soit n un entier naturel non nul.

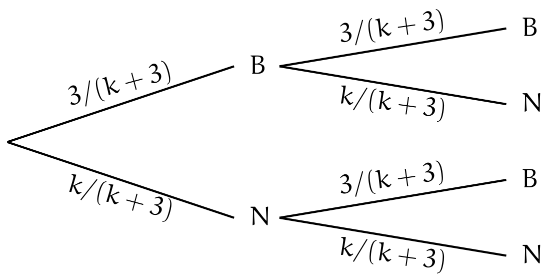
$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,58)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,58)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,58) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \text{ (car } \ln(0,58) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 8,4\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1) a) L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

Représentons la situation par un arbre :



$p(Y_k = 5)$ est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ou encore

$$p\left(Y_k = 5\right) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

b) De même, $p\left(Y_k = -9\right) = \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$ et $p\left(Y_k = -1\right) = \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$.

Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

y_i	-9	-1	5
$p\left(Y_k = y_i\right)$	$9/(k+3)^2$	$k^2/(k+3)^2$	$6k/(k+3)^2$

2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$E\left(Y_k\right) = (-9) \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2},$$

puis

$$\begin{aligned}
E\left(Y_k\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2} > 0 \Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0 \text{ (car } (k+3)^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 < 144 \\
&\Leftrightarrow -12 < k - 15 < 12 \Leftrightarrow 3 < k < 27 \Leftrightarrow 4 \leqslant k \leqslant 26.
\end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.

