Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2) Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4) Donner une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{x-1}\,dx$.

a) Soient a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $G(x) = (ax+b)e^{x-1}$.
Déterminer les réels a et b de sorte que G soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^{x-1}$.

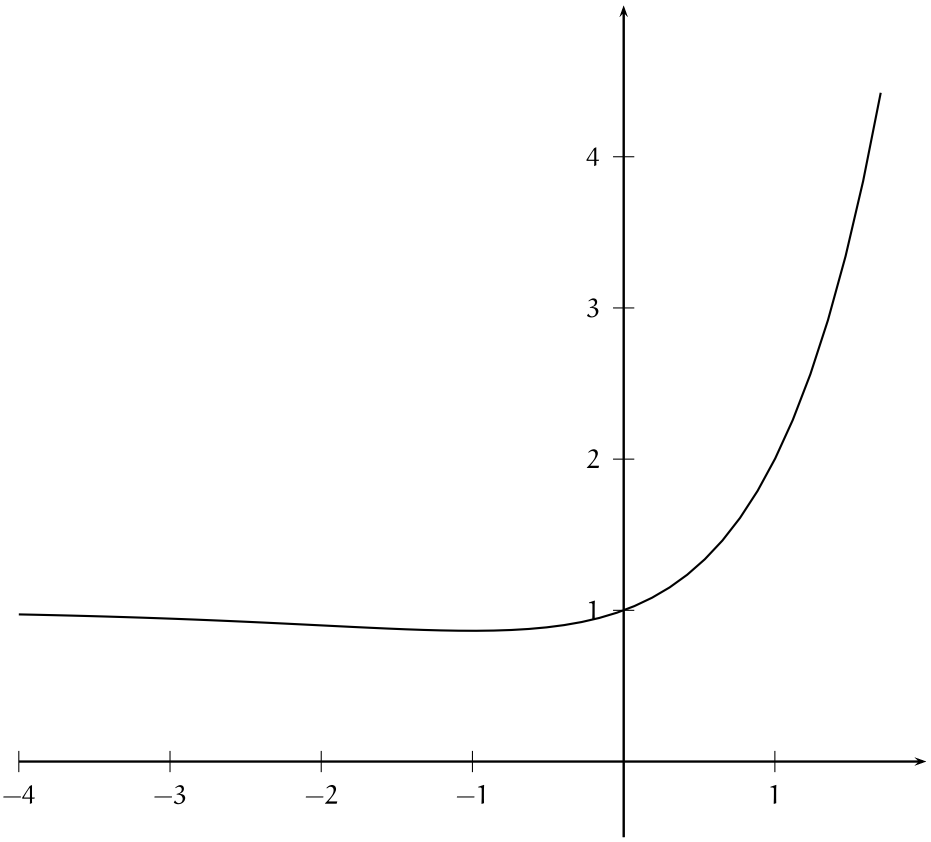
b) En déduire que $I = \dfrac{1}{e}$.

3) En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

ANNEXE 1
Exercice1
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de f



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.