Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2) Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4) Donner une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1) Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{x-1}\,dx$.

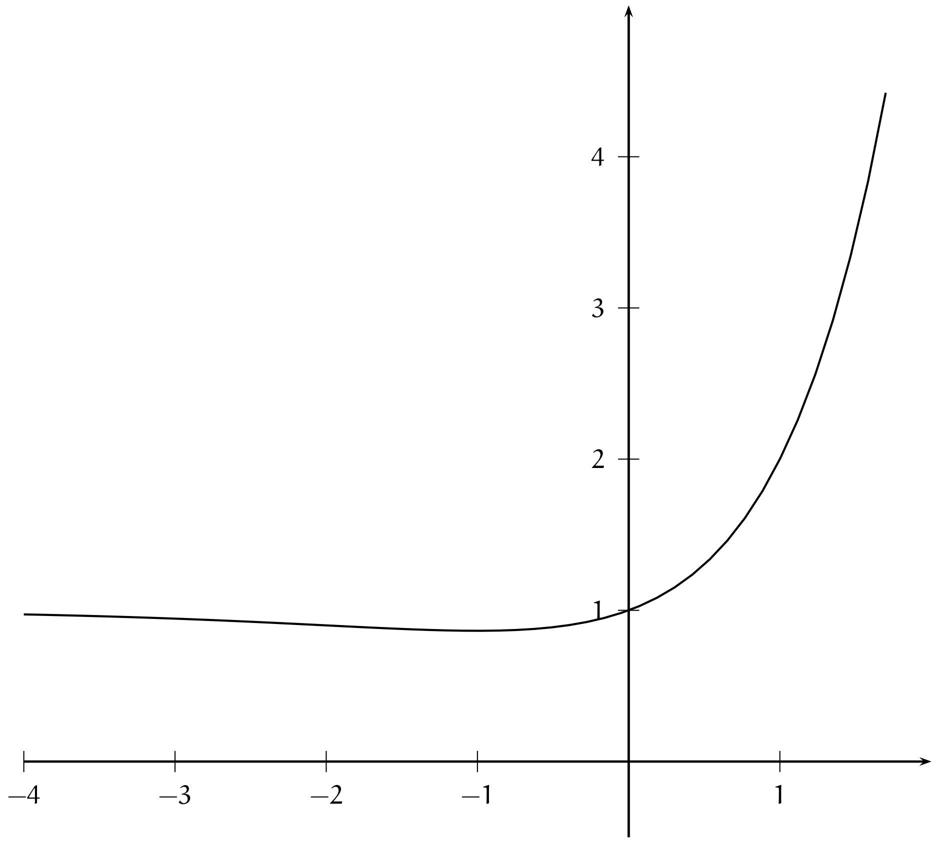
a) Soient a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $G(x) = (ax+b)e^{x-1}$.
Déterminer les réels a et b de sorte que G soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^{x-1}$.

b) En déduire que $I = \dfrac{1}{e}$.

3) En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

ANNEXE 1
Exercice1
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de f



Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction

1) Pour tout réel x, $f(x) = xe^{x-1} + 1 = 1 + \dfrac{1}{e} \times (xe^x)$. Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{e} \times 0 = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{x-1} + x \times (x-1)'e^{x-1} + 0 = e^{x-1} + xe^{x-1} \\ &= (x+1)e^{x-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = (x+1)e^{x-1}.}$$

4) Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x+1$.
Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et s'annule en -1. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente

1) Soit $a > 0$. $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$. Par suite, une équation de la tangente T_a est

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ou encore $y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$ ou enfin $y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1$.

$$\boxed{\text{Une équation de } T_a \text{ est } y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2e^{a-1}.}$$

2) T_a passe par $O(0,0)$ si et seulement $0 = (a+1)e^{a-1} \times 0 + 1 - a^2e^{a-1}$ ou encore $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

$$\boxed{O \in T_a \Leftrightarrow 1 - a^2e^{a-1} = 0.}$$

3) $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$ et donc 1 est une solution de l'équation (E) : $1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0, +\infty[$.

Montrons que 1 est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, posons $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = -\left(2xe^{x-1} + x^2e^{x-1}\right) = -x(x+2)e^{x-1}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x > 0$ et $x + 2 > 0$ et $e^{x-1} > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) < 0$. Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que si $0 < x < 1$, $g(x) > g(1)$ ou encore $g(x) > 0$ et si $x > 1$, $g(x) < g(1)$ ou encore $g(x) < 0$.

En particulier, pour tout réel x de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g(x) \neq 0$. On en déduit que 1 est donc l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

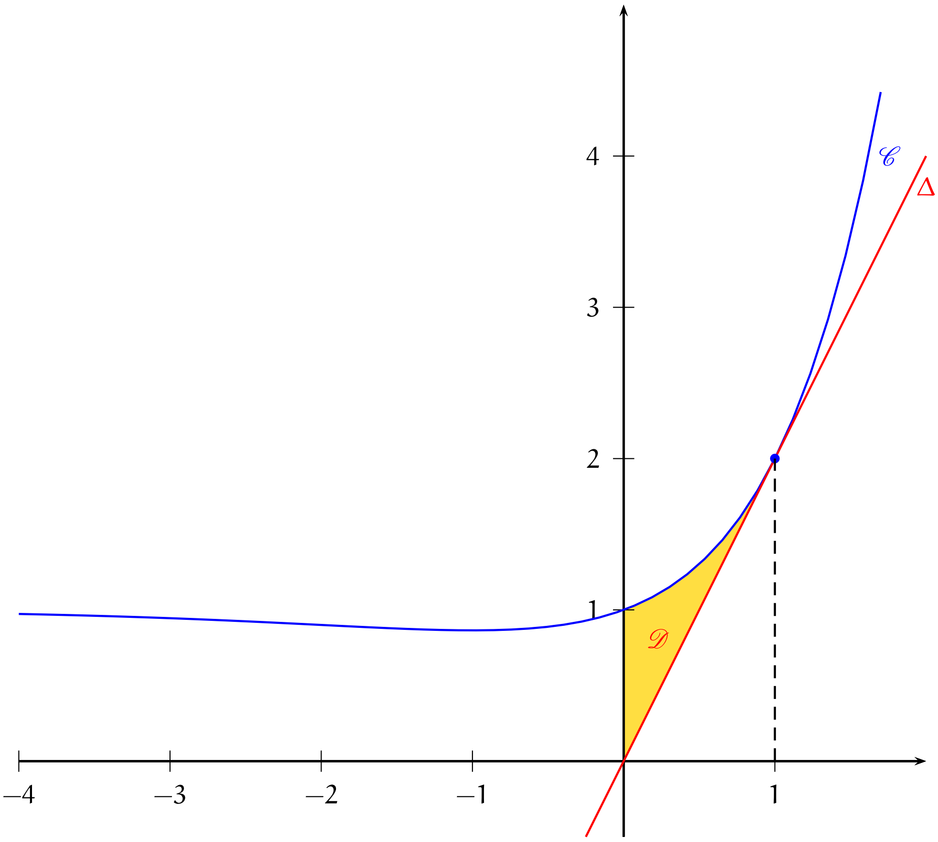
$$\boxed{1 \text{ est l'unique solution de l'équation } 1 - x^2e^{x-1} = 0.}$$

4) Si $a = 1$, l'équation obtenue à la question 1) s'écrit $y = 2x$.

$$\boxed{O \in T_a \Leftrightarrow a = 1 \text{ et une équation de } T_1 \text{ est } y = 2x.}$$

Partie C : calcul d'aire

1) Graphique



2) a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$G'(x) = ae^{x-1} + (ax + b)e^{x-1} = (ax + a + b)e^{x-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\text{pour tout réel } x,\ G'(x) = xe^{x-1} &\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ (ax + a + b)e^{x-1} = xe^{x-1} \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ ax + a + b = x \text{ (car pour tout réel } x,\ e^{x-1} \neq 0) \\
&\Leftarrow a = 1 \text{ et } a + b = 0 \Leftarrow a = 1 \text{ et } b = -1
\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^{x-1}$ est donc la fonction $x \mapsto (x-1)e^{x-1}$.

b) On en déduit que

$$I = \int_0^1 xe^{x-1}\,dx = \left[(x-1)e^{x-1}\right]_0^1 = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{I = \frac{1}{e}.}$$

3) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ sur $[0, 1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = \int_0^1 xe^{x-1}\,dx + \int_0^1 (1 - 2x)\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{e} + \left[x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{e} + (1-1) - (0-0) = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine } \mathscr{D} \text{ est égale à } \frac{1}{e}.}$$

