Rochambeau 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux.
Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard successivement (et sans répétition) deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1) Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2) Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3) Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?

Rochambeau 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

On note D_1 (respectivement D_2) l'événement « le premier ordinateur choisi est défectueux » (respectivement « le deuxième ordinateur choisi est défectueux »).

La probabilité demandée est $p\left(D_1 \cap D_2\right)$.

$$p\left(D_1 \cap D_2\right) = p\left(D_1\right) \times p_{D_1}\left(D_2\right) = \frac{3}{25} \times \frac{2}{24} = \frac{1}{100}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que les deux ordinateurs soient défectueux est } \frac{1}{100}.}$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

puis $p(X > t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right),$$

avec $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

2) La probabilité demandée est $p_{X>3}(X > 5)$.

$$\begin{aligned} p_{X>3}(X > 5) &= \frac{p((X > 5) \cap (X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5\times 0,18}}{e^{-3\times 0,18}} = \frac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} \\ &= 0,698 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.} \end{aligned}$$

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0,4)^0(0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geqslant 0,6^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geqslant \ln(0,6^n) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,6) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 13,5\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à 0,999 est 14.

