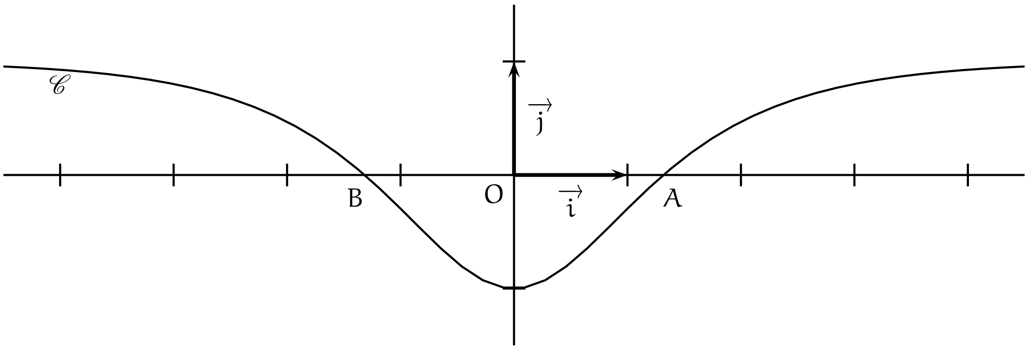
Réunion 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



PARTIE A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1) La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.

3) On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
En déduire la valeur exacte de a.

b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

PARTIE B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1) Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2) Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.

3) On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$.

b) En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

