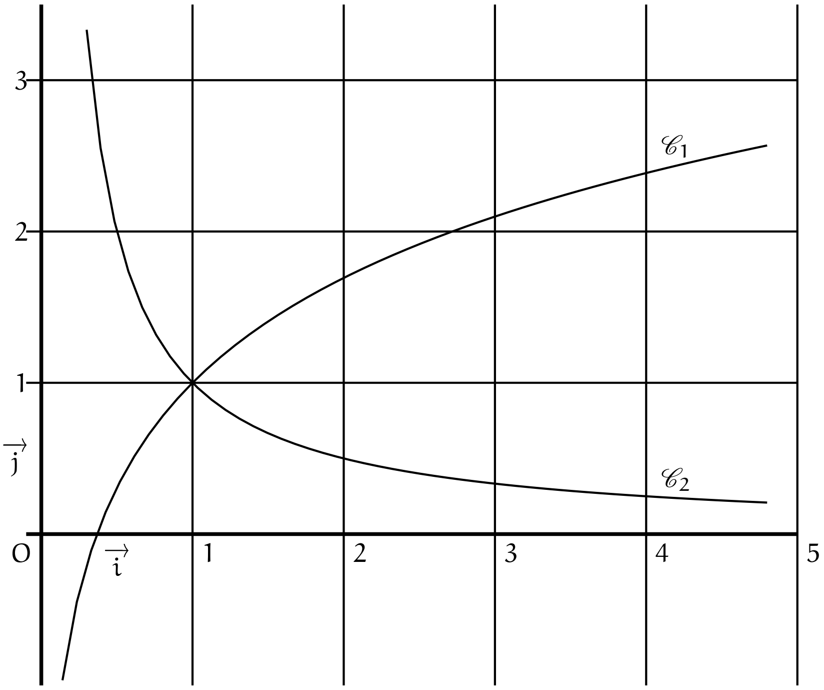
Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (10 points) (commun à tous les candidats)

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des trois questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1) La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est

- 0
- $+\infty$
- On ne peut pas conclure

2) La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est

- 0
- $0,2$
- On ne peut pas conclure

3) Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$-$

•

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

4) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5) Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

6) Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ qu'on note α.

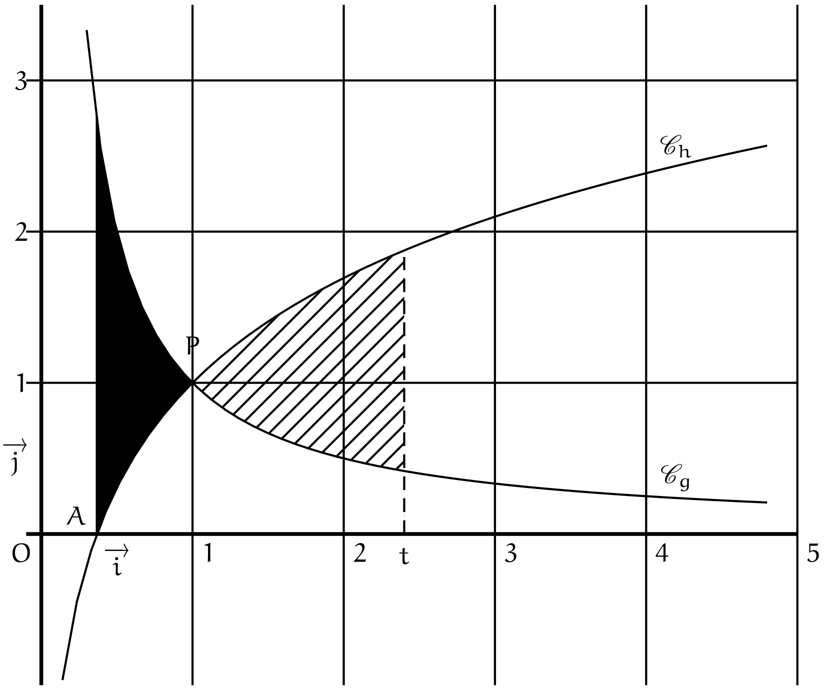
7) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1) A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2) P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$.

3) On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ (domaine en noir sur le graphique).

a) Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie **II**.

b) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}$.

4) Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1, +\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

a) Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b) Conclure.

Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie I

1.	**B**
2.	**A**
3.	**C**

1) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = +\infty$.

2) L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

3) $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0, 1[$, strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en leur point d'abscisse 1. Donc le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Partie II

1) Limite en 0. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et donc en additionnant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Par suite, en additionnant

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On note tout d'abord que $f(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si x est un réel tel que $0 < x < 1$, on a $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$. Si x est un réel tel que $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 0$. On résume ces résultats dans un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

5) La fonction F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et sa dérivée, à savoir f, est strictement positive sur $]1,+\infty[$ d'après la question 3). Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

6) La fonction F est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1,+\infty[$.
Or, $F(1) = 0$ et $1 - \dfrac{1}{e} = 0,6\ldots$. Donc $F(1) < 1 - \dfrac{1}{e}$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) > 1 - \dfrac{1}{e}$. Ainsi, $1 - \dfrac{1}{e} \in \left[F(1), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[= [0,+\infty[$ et donc l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[1,+\infty[$.

7) $F(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{e} = 0,63\ldots$ Ensuite, $F(1,9) = 0,57\ldots$ et $F(2) = 0,69\ldots$. Donc $F(1,9) < F(\alpha) < F(2)$. Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,9 < \alpha < 2.}$$

Partie III

1) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{e}, 0\right).}$$

2) Soit x un réel strictement positif.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

D'après l'étude du signe de la fonction f effectuée à la question II.3), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$. Comme $g(1) = h(1) = 1$,

$$\boxed{\text{le point } P \text{ a pour coordonnées } (1,1).}$$

3) a) Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a $g(x) - h(x) = -\ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x} = -f(x)$. D'après la question II.3), la fonction f est négative sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ et donc la fonction $g - h$ est positive sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$. Par suite,

$$\mathscr{A} = \int_{1/e}^{1} (g(x) - h(x))\, dx = \int_{1/e}^{1} (-f(x))\, dx.$$

b) D'après la question II.4), on en déduit que

$$\mathscr{A} = [-F(x)]_{1/e}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) = -0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) + \ln(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}.}$$

4) a) Soit t un réel strictement supérieur à 1. Dans ce cas, pour tout réel x de $[1,t]$, on a $h(x) - g(x) = f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\mathscr{B}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\, dx = \int_1^t f(x)\, dx = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1) = F(t) = t\ln(t) - \ln(t).$$

b) Soit $t \geqslant 1$. D'après la question II.6),

$$\mathscr{B}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow t = \alpha.$$

Il existe un réel t et un seul tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}$: le réel α défini à la question II.6).

