Polynésie 2011. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6) a) Démontrer que $10^8 \equiv -1$ (modulo 17) puis que $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Polynésie 2011. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2

1) $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$, $u_2 = 10 \times 31 + 21 = 331$ et $u_3 = 10 \times 331 + 21 = 3331$.

$$\boxed{u_1 = 31,\ u_2 = 331 \text{ et } u_3 = 3331.}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

- $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 = 3u_0$ et donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$. Alors

$$3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10(3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{(n+1)+1} - 7.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 3u_n = 10^{n+1} - 7.}$$

b) $10^{n+1} - 7 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n+1} - 7 = \underbrace{9\ldots9}_{n}3$ puis en divisant par 3, $u_n = \dfrac{10^{n+1} - 7}{3} = \underbrace{3\ldots3}_{n}1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ l'écriture décimale de } u_n \text{ est } \underbrace{3\ldots3}_{n}1.}$$

3) $u_2 = 331$ puis $\sqrt{u_2} = 18,1\ldots$ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{u_2}$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17.
331 n'est pas divisible par 2 car 331 n'est pas pair.
331 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres à savoir 7 ne l'est pas.
331 n'est pas divisible par 5 car le chiffre des unités n'est ni 0, ni 5.
$\dfrac{331}{7} = 47,2\ldots$ et donc 331 n'est pas divisible par 7.
$\dfrac{331}{11} = 30,09\ldots$ et donc 331 n'est pas divisible par 11.
$\dfrac{331}{13} = 25,4\ldots$ et donc 331 n'est pas divisible par 13.
$\dfrac{331}{17} = 19,4\ldots$ et donc 331 n'est pas divisible par 17.
331 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée et donc

$$\boxed{u_2 \text{ est un nombre premier.}}$$

4) Soit n un entier naturel. D'après la question 2)b), le chiffre des unités de u_n est 1. Donc u_n n'est ni divisible par 2, ni divisible par 5.

Toujours d'après la question 2)b), la somme des chiffres de u_n est $3n + 1$. La somme des chiffres de u_n n'est pas divisible par 3 et on sait alors que u_n n'est pas divisible par 3.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \text{ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.}}$$

5) a) Soit n un entier naturel. $10 \equiv -1 \pmod{11}$ et donc $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{11}$ ou encore

$$10^{n+1} \equiv -(-1)^n \pmod{11}.$$

Ensuite, $-7 \equiv 4 \pmod{11}$. D'après la question 2)a), $3u_n = -7 + 10^{n+1}$ et donc $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}.}$$

b) Si n est pair, $3u_n \equiv 3 \pmod{11}$ et si n est impair, $3u_n \equiv 5 \pmod{11}$.
Comme $3 \not\equiv 0 \pmod{11}$ et $5 \not\equiv 0 \pmod{11}$.

Ainsi, dans tous les cas, $3u_n \not\equiv 0 \pmod{11}$ ou encore $3u_n$ n'est pas un multiple de 11. Il en est de même de u_n car si u_n était un multiple de 11, il en serait de même de $3u_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \text{ n'est pas divisible par 11.}}$$

6) a) $10 \equiv -7 \pmod{17}$ puis $10^2 \equiv 49 \pmod{17}$ puis $10^2 \equiv 49 - 3 \times 17 \pmod{17}$ ou encore $10^2 \equiv -2 \pmod{17}$.
Ensuite, $10^8 \equiv (-2)^4 \pmod{17}$ ou encore $10^8 \equiv 16 \pmod{17}$ ou encore $10^8 \equiv -1 \pmod{17}$.
Enfin, $10^{16} \equiv (-1)^2 \pmod{17}$ ou encore

$$\boxed{10^{16} \equiv 1 \pmod{17}.}$$

b) Soit k un entier naturel. D'après la question 2)a), $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$.

D'après la question a), puisque $10^{16k+9} = (10^{16})^k \times 10^8 \times 10$, on a $10^{16k+9} \equiv 1^k \times (-1) \times (-7) \pmod{17}$ ou encore

$$10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17}.$$

Mais alors $10^{16k+9} - 7 \equiv 0 \pmod{17}$ ou encore 17 divise $3u_{16k+8}$.

Puisque 17 divise $3u_{16k+8}$ et que 17 est premier à 3, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que 17 divise u_{16k+8}.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{16k+8} \text{ est divisible par } 17.}$$

