Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1) Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1. **VRAI**

2. **VRAI**

3. **FAUX**

4. **VRAI**

5. **VRAI**

Justification 1.

- $OA = |z_A| = |2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.
- $OB = |z_B| = |7 - 3i| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$.
- $AB = |z_B - z_A| = |(7 - 3i) - (2 - 5i)| = |5 + 2i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Donc, $AB = AO$ et le triangle OAB est isocèle en A. De plus, $AO^2 + AB^2 = 29 + 29 = 58 = OB^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en A.

Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en A. La proposition 1 est vraie.

Justification 2. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|z - i| = |z + 2i| &\Leftrightarrow |x + i(y - 1)|^2 = |x + i(y + 2)|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 2)^2\\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(Δ) est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses qui est l'axe des réels. La proposition 2 est vraie.

Justification 3.

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}.$$

Ensuite, si n est un entier naturel non nul,

$$z^{3n} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/6}\right)^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i3n\pi/6} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{in\pi/2}.$$

En particulier, si $n = 2$, on obtient

$$z^6 = z^{3\times 2} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3\times 2} e^{i2\pi/2} = -\left(2\sqrt{3}\right)^6$$

qui n'est pas un imaginaire pur. Donc la proposition 3 est fausse.

Justification 4. Un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive. Posons $z = iy$ où y est un réel strictement positif.

- $|i + z| = |i(y + 1)| = |i| \times |y + 1| = y + 1$ car $|i| = 1$ et car $y + 1 \geqslant 0$.
- $1 + |z| = 1 + |iy| = 1 + |i| \times |y| = y + 1$ car $|i| = 1$ et car $y \geqslant 0$.

Donc $|i + z| = 1 + |z|$ et la proposition 4 est vraie.

Justification 5. Soit z un nombre complexe de module 1. Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}z^2 + \frac{1}{z^2} &= (e^{i\theta})^2 + \frac{1}{(e^{i\theta})^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)\\ &= 2\cos(2\theta).\end{aligned}$$

Donc $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel et la proposition 5 est vraie.

