Liban 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + e^{-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

PARTIE A

1) Étudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

PARTIE B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}.$$

1) Démontrer que, pour tout réel positif, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1 + x)$.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n + 1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln(n)) = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

5) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

6) a) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leqslant 1 + \ln(n - 1)$.

7) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n - 1)$.
Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.