France métropolitaine 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est $0,0492$.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chances » que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

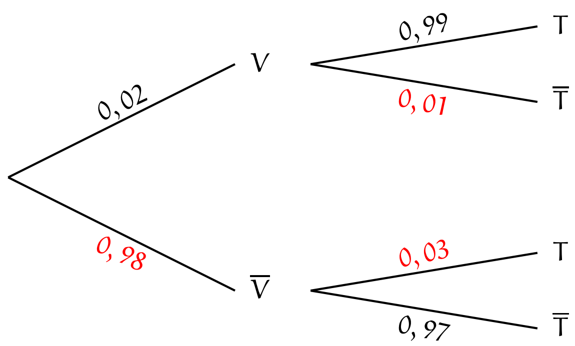
France métropolitaine 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) L'énoncé fournit directement

$$\boxed{p(V) = 0,02,\ p_V(T) = 0,99 \text{ et } p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,97.}$$

Représentons la situation par un arbre.



b) On en déduit que $p\left(V \cap T\right) = p(V) \times p_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

$$\boxed{p\left(V \cap T\right) = 0,0198.}$$

2) La probabilité demandée est $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(T) = p\left(T \cap V\right) + p\left(T \cap \overline{V}\right).$$

D'après la question précédente, $p\left(V \cap T\right) = 0,0198$ et d'autre part

$$p\left(T \cap \overline{V}\right) = p\left(\overline{V}\right) \times p_{\overline{V}}(T) = (1 - p(V))\left(1 - p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)\right) = (1 - 0,02)(1 - 0,97) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294,$$

et donc $p(T) = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$.

$$\boxed{p\left(T\right) = 0,0492.}$$

3) a) La probabilité demandée est $p_T(V)$. Or,

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} = 0,402\ldots$$

Donc $p_T(V) = 0,4$ à 10^{-2} près ou encore $p_T(V) = 40\%$ à 1% près ce qui justifie la phrase de l'énoncé.

b) La probabilité demandée est $p_{\overline{T}}(\overline{V})$. Or,

$$p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \frac{p\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{p\left(\overline{T}\right)}.$$

Ensuite, d'après la question 2), $p\left(\overline{T}\right) = 1 - p(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$ et d'autre part

$$p\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right) = p\left(\overline{V}\right) \times p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,98 \times 0,97 = 0,9506$$

puis $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{0,9506}{0,9508} = 0,9998$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{p_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0,9998 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

PARTIE B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est contaminée par le virus » avec une probabilité $p = 0,02$ ou « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,98$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,02$.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$. La calculatrice fournit

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{10} - \binom{10}{1} \times 0,02^1 \times 0,98^9 \\ &= 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins deux personnes soient contaminées est $0,0162$ arrondi à 10^{-4}.

