Centres étrangers 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Leur tracé est donné en annexe.

1) Etude des fonctions f et g

a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.

b) Justifier le fait que les fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$
Pour cela, on démontrera d'abord que pour tout réel non nul x, $f(x) = e \times \dfrac{1}{e^x/x}$ et $g(x) = \dfrac{e}{4} \times \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2}$.

c) Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2) Calcul d'intégrales
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \text{ (en particulier } I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx\text{)}.$$

a) Calculer la valeur exacte de I_0.

b) Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose $g_n(x) = x^n e^{1-x}$ (en particulier $g_0(x) = e^{1-x}$).
Etablir que pour tout réel x et tout entier naturel n,

$$g'_{n+1}(x) = (n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x).$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

c) En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3) Calcul d'une aire plane

a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :

$$\mathscr{A} = 3 - e.$$

4) Etude de l'égalité de deux aires
Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

On admet que $S(a)$ s'exprime par :

$$S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1).$$

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.

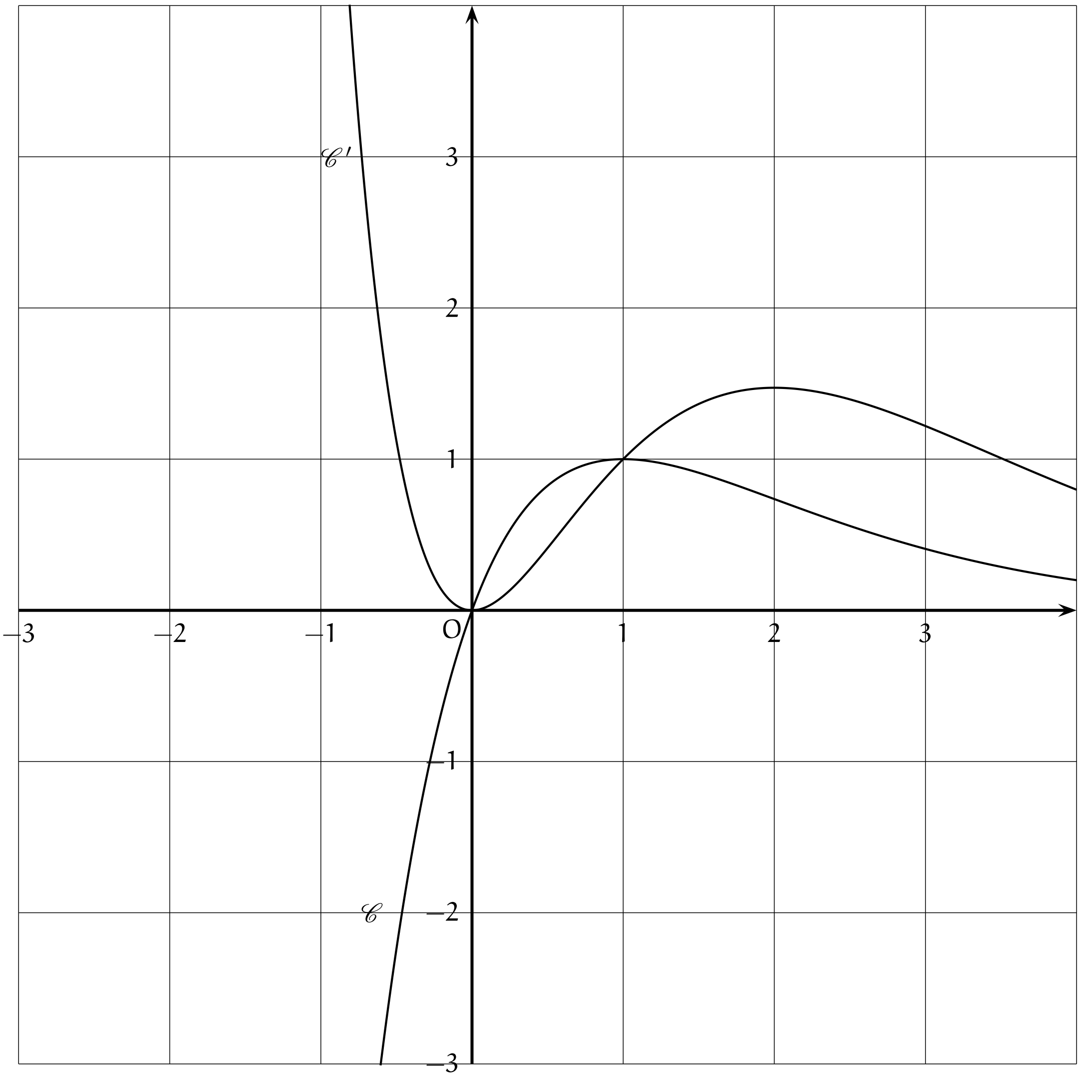
a) Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation :

$$e^a = a^2 + a + 1.$$

b) *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

FEUILLE ANNEXE

Courbes de l'exercice 4



Centres étrangers 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) Etude des fonctions f et g

a) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de g en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{1-x} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.}$$

b) Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f(x) = x \times e \times \dfrac{1}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e \times \dfrac{1}{e^x/x} = e \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Limite de g en $+\infty$. Soit x un réel non nul.

$$g(x) = x^2 \times e \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{1}{e^x/x^2} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2/4}} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\dfrac{\left(e^{x/2}\right)^2}{(x/2)^2}} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\left(\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x/2} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{4} \times \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2} = \dfrac{e}{4} \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

c) Variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. En tenant compte de $f(1) = 1 \times e^0 = 1$, on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Variations de g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = (2x - x^2)e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. On en déduit le tableau de variations de le fonction g.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

2) Calcul d'intégrales

a) La fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est continue sur le segment $[0,1]$. Donc I_0 existe.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = (-e^{1-1}) - (-e^{1-0}) = e - 1.$$

$$\boxed{I_0 = e - 1.}$$

b) Soit n un entier naturel. La fonction $g_{n+1}\ :\ x \mapsto x^{n+1}e^{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'_{n+1}(x) = (n+1)x^n e^{1-x} + x^{n+1}\times(-1)e^{1-x} = (n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x).$$

Intégrons cette égalité. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)I_n - I_{n+1} &= (n+1)\int_0^1 g_n(x)\,dx - \int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx = \int_0^1 \left((n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x)\right)\,dx\\ &= \int_0^1 g'_{n+1}(x)\,dx = [g_{n+1}(x)]_0^1 = 1^{n+1}e^{1-1} - 0^{n+1}e^{1-0}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Par suite, $(n+1)I_n - I_{n+1} = 1$ puis $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.}$$

c) $I_1 = -1 + 1\times I_0 = -1 + (e-1) = e - 2$ et $I_2 = -1 + 2\times I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$.

$$\boxed{I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.}$$

3) Calcul d'une aire plane

a) La position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x. Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(1-x)e^{1-x}.$$

Le signe de $f(x) - g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $]0,1[$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent aux points de coordonnées $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$ c'est-à-dire $(0,0)$ et $(1,1)$.

b) D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $[0,1]$. Donc, d'après la question 2)c),

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = I_1 - I_2 = (e-2) - (2e-5) = 3 - e.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3 - e.}$$

4) Etude de l'égalité de deux aires

a) Soit $a > 1$.

$$\begin{aligned}S(a) = \mathscr{A} &\Leftrightarrow 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1) = 3 - e \Leftrightarrow e\times\frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = 1\\ &\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = e^a \text{ (car } e^a \neq 0).\end{aligned}$$

b) Pour $a \geqslant 1$, posons $h(a) = e^a - a^2 - a - 1$ de sorte que $S(a) = \mathscr{A} \Leftrightarrow h(a) = 0$.
La fonction h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h'(a) = e^a - 2a - 1$. De même, la fonction h' est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h''(a) = e^a - 2$.

Pour $a \geqslant 1$, $h''(a) \geqslant e^1 - 2 > 0$. Donc la fonction h' est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Puisque la fonction h' est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on sait que pour tout réel k de $\left[h'(1), \lim\limits_{a \to +\infty} h'(a)\right[$, l'équation $h'(a) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$.

En particulier, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} h'(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} e^a - 2a - 1 = \lim\limits_{a \to +\infty} e^a \left(1 - 2\frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et que d'autre part $h'(1) = e - 2 - 1 = e - 3 < 0$, il existe un unique réel α de $[1, +\infty[$ et même $]1, +\infty[$ tel que $h'(\alpha) = 0$.
Puisque la fonction h' est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que la fonction h' est strictement négative sur $[1, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ puis que la fonction h est strictement décroissante sur $[1, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Puisque $h(1) = e - 3 < 0$ et que h est strictement décroissante sur $[1, \alpha]$, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) < 0$. En particulier, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) \neq 0$ et d'autre part, $h(\alpha) < 0$.

Ensuite, la fonction h est continue et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.
On en déduit que pour tout réel k de $\left[h(\alpha), \lim\limits_{a \to +\infty} h(a)\right[$, l'équation $h(a) = k$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$.

En particulier, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} e^a \left(1 - \frac{a^2}{e^a} - \frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et que $h(\alpha) < 0$, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$.

En résumé, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ ou encore l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ admet une unique solution a_0 dans $[1, +\infty[$. On peut montrer que $1,79 < a_0 < 1,80$.