

Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Restitution organisée de connaissances

Soient s et t deux réels positifs. Vérifions tout d'abord que $p([t, +\infty[) \neq 0$.

$$p([t, +\infty[) = 1 - p([0, t]) = 1 - p([0, t]) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

On a montré au passage que $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$. Ensuite, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} , $p([t, +\infty[) = e^{-\lambda t} \neq 0$ puis

$$\begin{aligned} p_{[t, +\infty[}([t, t+s]) &= \frac{p((t \leq X \leq t+s) \cap (X \geq t))}{p(X \geq t)} = \frac{p(t \leq X \leq t+s)}{1 - p(X < t)} = \frac{p(t \leq X \leq t+s)}{1 - p(X \leq t)} \quad (\text{car } p(X = t) = 0) \\ &= \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{(1 - e^{-\lambda(t+s)}) - (1 - e^{-\lambda t})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - e^{-\lambda t - \lambda s + \lambda t} = 1 - e^{-\lambda s} = F(s). \end{aligned}$$

En particulier, $p_{[t, +\infty[}([t, t+s])$ est indépendant de t .

2) La probabilité demandée est $p(X \geq 2)$. D'après la question précédente, pour tout réel positif t , on a

$$p(X \geq t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,2t}$$

et donc $p(X \geq 2) = e^{-0,4}$.

3) La probabilité demandée est $p_{[2, +\infty[}([6, +\infty[)$.

$$p_{[2, +\infty[}([6, +\infty[) = \frac{p((X \geq 2) \cap (X \geq 6))}{p(X \geq 2)} = \frac{p(X \geq 6)}{p(X \geq 2)} = \frac{e^{-0,2 \times 6}}{e^{-0,2 \times 2}} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-0,4}} = e^{-0,8} = 0,45 \text{ arrondi au centième.}$$

4) a) Notons Y le nombre de capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après la question 2)) ou « le capteur tombe en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$p(Y = 2) = \binom{10}{2} \times (e^{-0,4})^2 (1 - e^{-0,4})^8 = 0,0028217 \dots$$

Donc $p(Y = 2) = 0,002822$ arrondi à la sixième décimale.

b) La probabilité que tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y = 0) = \binom{10}{0} (e^{-0,4})^0 (1 - e^{-0,4})^{10} = (1 - e^{-0,4})^{10}$$

et donc la probabilité qu'au moins un appareil ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y \geq 1) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,9999848 \dots$$

Donc, $p(Y \geq 1) = 0,999985$ arrondi à la sixième décimale.