Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Étude d'une fonction f. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c) En déduire les variations de la fonction f.

2) Étude d'une fonction g. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) a) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

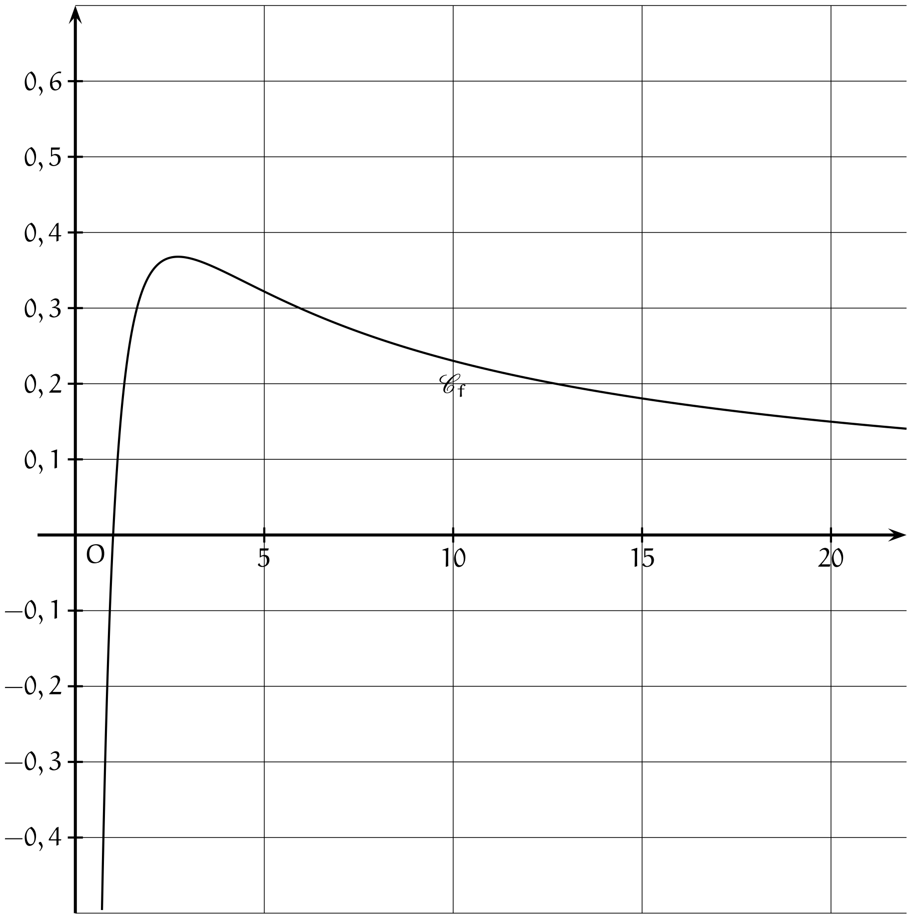
c) Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$.

4) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathscr{A}$.

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 1



Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Etude d'une fonction f.

a) Limite de f en 0. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

Limite de f en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ sur $]0,+\infty[$.

Or, pour $x > 0$, $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e^1 \Leftrightarrow x < e$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) et de même $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2) Etude d'une fonction g.

a) Limite de g en 0. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = \lim_{X\to-\infty} X^2 = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 = +\infty$.

Limite de g en $+\infty$. Soit $x > 0$.

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

b) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ g'(x) = \frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ sur $]0, +\infty[$.
Le signe de $\ln x$ est connu et d'autre part, comme à la question 1)a), pour $x > 0$, $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^2$ et $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$. On en déduit le signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ suivant les valeurs de x :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln x$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln x)(2 - \ln x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

3) a) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x = (\ln x)^2 \ \left(\text{car } \frac{1}{x} \neq 0\right) \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e. \end{aligned}$$

Comme $f(1) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont exactement deux points communs à savoir les points de coordonnées $(1, 0)$ et $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

b) La position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est donnée par le signe de $g(x) - f(x)$. Or pour $x > 0$,

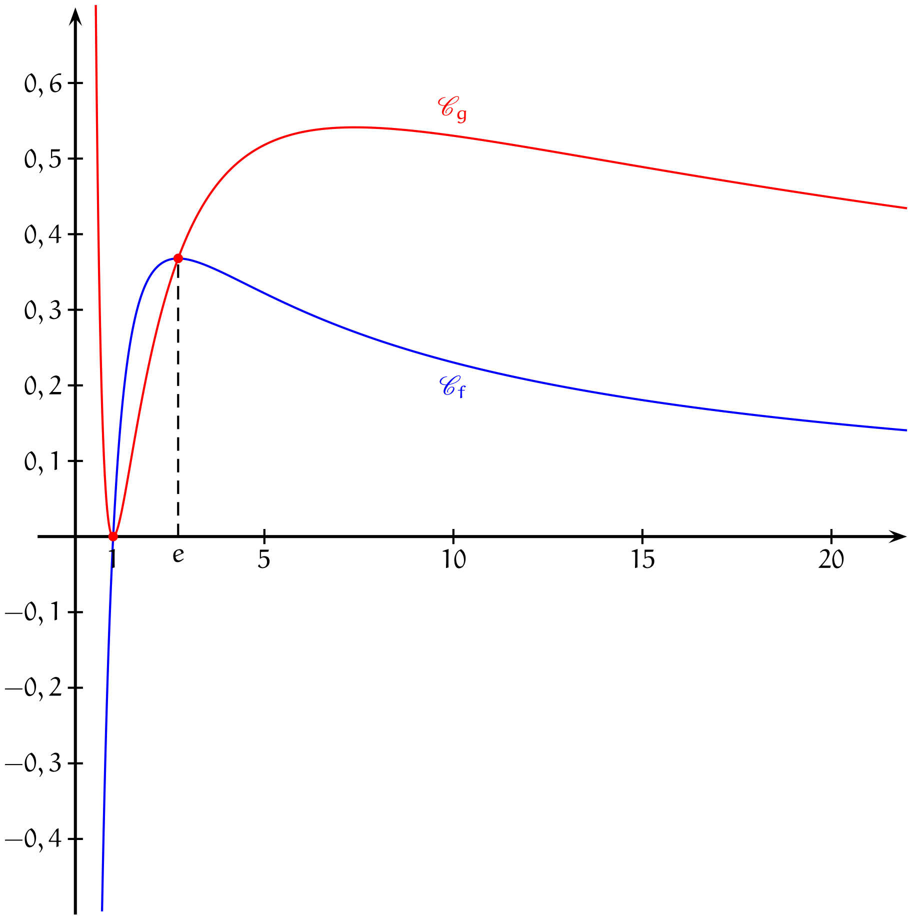
$$g(x) - f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)(\ln x - 1)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g(x) - f(x)$ est du signe de $(\ln x)(\ln x - 1)$ qui est donné dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)(\ln x - 1)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$ et sur $]e, +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1, e[$ et on retrouve le fait que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 1 et e.

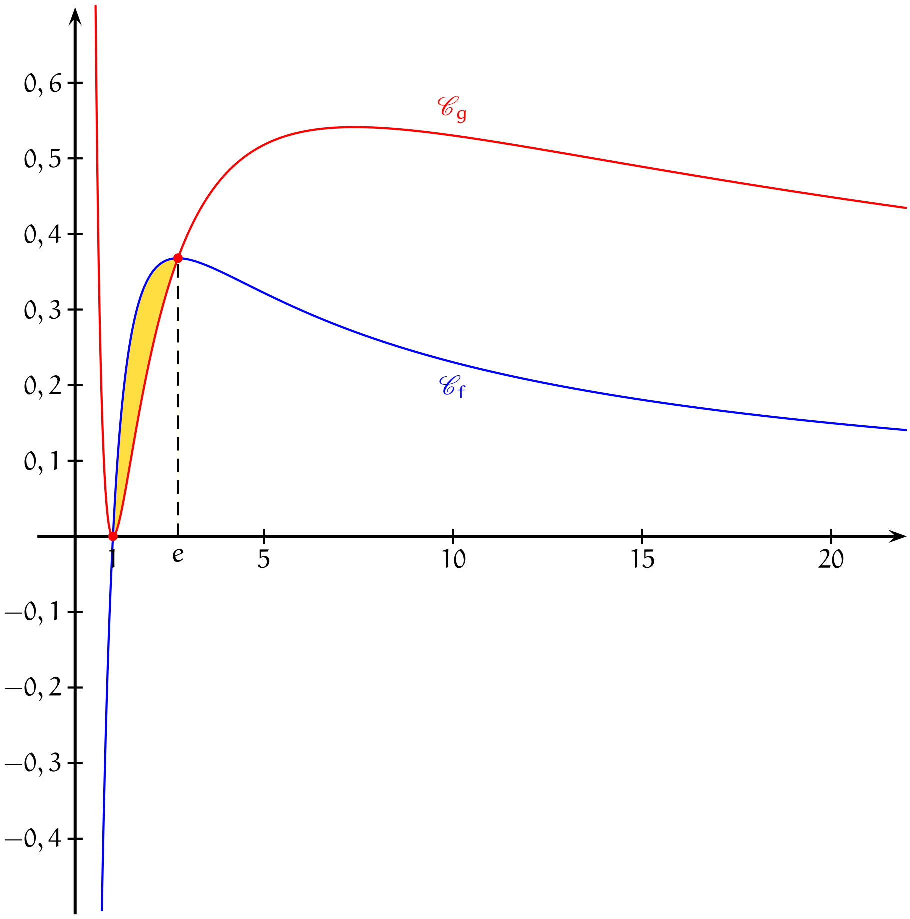
c) Graphique.



4) Les fonction f et g sont continues sur $[1, e]$ et de plus, pour tout réel x de $[1, e]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_1^e f(x) - \int_1^e g(x)\ dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x\ dx - \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2\ dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$
$$= \left(\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\ln e)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{6} \text{ unité d'aire.}}$$



0, 6
0, 5
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−0, 1
−0, 2
−0, 3
−0, 4
1
e
5
10
15
20
$\mathscr{C}_g$
$\mathscr{C}_f$

