Réunion 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Puisque pour tout réel x de $]-1,+\infty[$ on a $x+1>0$, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Il en est de même de f. De plus, pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-1,+\infty[.}$$

b) • $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \ln(x+1) = \lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}} \ln(X) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) a) Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, $g(x) = \ln(x+1)+1-x$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 1-x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \ln(1+x) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (\ln(1+x)+1-x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.
Maintenant, pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, on a $x+1 \neq 0$ puis

$$g(x) = -x+1+\ln(1+x) = (x+1)\left(\frac{-x+1}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{x+1}\right) \quad (*).$$

Pour $x>0$, $\dfrac{-x+1}{x+1} = \dfrac{-x}{x} \times \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x+1}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\right) = -1$. Comme d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$, l'égalité $(*)$ nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.}$$

c) La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x>-1$,

$$g'(x) = f'(x)-1 = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}.$$

Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, on a $x+1>0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $-x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction g.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

d) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-1,0]$.
Donc pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x), g(0)\right] =]-\infty,1]$, l'équation $g(x)=k$ admet une solution et une seule dans $]-1,0]$. En particulier, l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $]-1,0]$. On note α cette solution. Puisque $g(0)=1\neq0$, on a $\alpha\neq0$ et donc $\alpha \in]-1,0[$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

De même, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

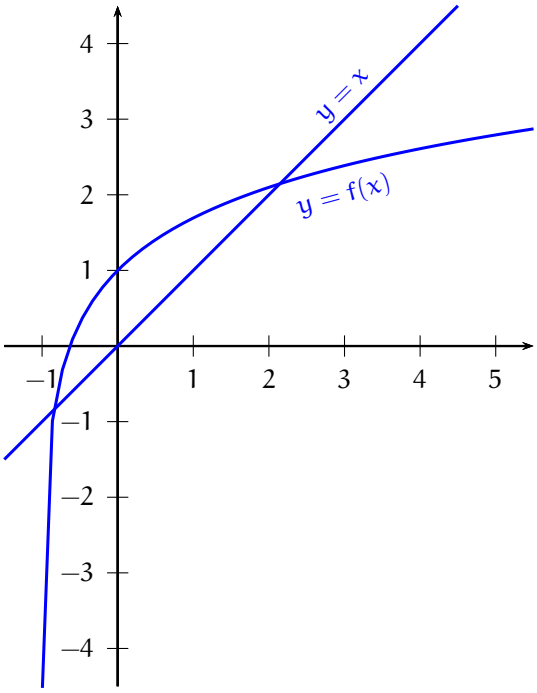
Donc pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] =]-\infty, 1]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note β cette solution. On a $g(2) = \ln(3) - 1 = 0,09\ldots > 0$ et $g(3) = \ln(4) - 2 = -0,6\ldots < 0$. Ainsi, $g(2) > g(\beta) > g(3)$ et puisque la fonction g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on a $2 < \beta < 3$. On a montré que $\beta \in [2, 3]$.

e) La fonction g est strictement croissante sur $]-1, \alpha]$. Donc, pour tout x de $]-1, \alpha[$, on a $g(x) < g(\alpha) = 0$. Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $]-1, \alpha[$.
De même, la fonction g est strictement positive sur $]\alpha, 0]$, strictement positive sur $[0, \beta[$ et strictement négative sur $]\beta, +\infty[$. En résumé,

> la fonction g est strictement négative sur $]-1, \alpha[$ et sur $]\beta, +\infty[$, strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et s'annule en α et β.

Le signe de $g(x) = f(x) - x$ fournit la position relative de la courbe C_f et de la droite D :

> C_f est strictement au-dessous de D sur $]-1, \alpha[$ et sur $]\beta, +\infty[$, strictement au-dessus de D sur $]\alpha, \beta[$ et C_f coupe D aux points d'abscisses α et β.



Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

- Puisque $u_0 = 2$, c'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Puisque $[2, \beta] \subset]-1, +\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  Maintenant, puisque la fonction f est croissante sur $]-1, +\infty[$ et que $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, on en déduit que $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\beta)$ ou encore que $f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$ (l'égalité $g(\beta) = 0$ fournit $f(\beta) = \beta$).
  Mais $f(2) = 1 + \ln(3) = 2,09\ldots \geqslant 2$ et donc $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$.

On a montré par récurrence que

> pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2) Etudions le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or $u_n \in [2, \beta]$ et, d'après la question 2)e) de la partie A, on a $g(u_n) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \geqslant u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par β d'après la question précédente. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un certain réel ℓ de l'intervalle $[2, \beta]$.

De plus, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \ln(1 + u_n)) = 1 + \ln(1 + \ell)$ et donc le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore de l'équation $g(x) = 0$. Comme le réel ℓ appartient à $[2, \beta]$, on en déduit que $\ell = \beta$. On a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.