Liban 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1) Étudier les variations de u sur $]0,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0,+\infty[$.
On note α cette solution.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0,+\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0,+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

