Liban 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1) Étudier les variations de u sur $]0, +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.
On note α cette solution.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0, 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0, +\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Liban 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) • La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$u'(x)=2x+\frac{1}{x}.$$

Pour tout réel strictement positif x, $u'(x)>0$ et donc la fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-2)=-2$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-2)=+\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$.

2) a) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Donc pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$, l'équation $u(x)=0$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$. En particulier, l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$.

b) La machine donne $u(1,31)=-0,01\ldots<0$ et $u(1,32)=0,02\ldots>0$. Donc, $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ et puisque la fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$$\boxed{1,31<\alpha<1,32.}$$

3) Pour $x\in]0,\alpha[$, on a $u(x)<u(\alpha)$ ou encore $u(x)<0$ et pour $x\in]\alpha,+\infty[$, on a $u(x)>u(\alpha)$ ou encore $u(x)>0$. Donc,

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement négative sur }]0,\alpha[\text{, strictement positive sur }]\alpha,+\infty[\text{ et s'annule en } \alpha.}$$

4) L'égalité $u(\alpha)=0$ s'écrit $\alpha^2-2+\ln\alpha=0$ ou encore $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x)&=2x+2\times\left(-\frac{1}{x}\right)\times(2-\ln x)=2x-\frac{2(2-\ln x)}{x}=\frac{2x^2-2(2-\ln x)}{x}=\frac{2(x^2-2+\ln x)}{x}\\ &=\frac{2u(x)}{x}. \end{aligned}$$

2) Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{2}{x}>0$. Donc, pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. D'après la question 3 de la partie A, la fonction f' est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0,\alpha] \text{ et strictement croissante sur } [\alpha,+\infty[.}$$

Partie C

1) Soit $x>0$.

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}=\sqrt{f(x)}.$$

2) a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)\geqslant x^2>0$. Donc la fonction f est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que pour tout réel $x>0$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Mais pour tout réel $x>0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ et donc, pour tout réel $x>0$, $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$. Par suite, les fonction f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

b) D'après la question 2 de la partie B, la fonction f admet un minimum sur $]0,+\infty[$ atteint en α. Puisque les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$, la distance AM est minimale quand l'abscisse de M est égale à α et donc quand le point M est le point P de coordonnées $(\alpha, \ln\alpha)$.

c) D'après la question 4 de la partie A, on a $\ln\alpha = 2-\alpha^2$ et donc

$$AP = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2+(\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2} \text{ (car } \alpha>0 \text{ et donc } \sqrt{\alpha^2}=\alpha).$$

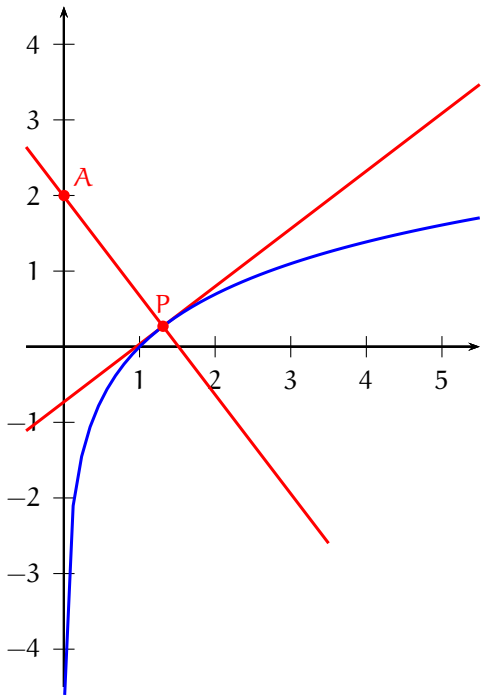
$$\boxed{AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}.}$$

3) Le coefficient directeur de la droite (AP) est $a = \dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A} = \dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}$. D'autre part, le coefficient directeur de la tangente à Γ en P est $a' = \ln'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$. D'après la question 4) de la partie A,

$$a\times a' = \frac{\ln\alpha-2}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha} = \frac{\ln\alpha-2}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1,$$

et donc

$$\boxed{\text{la droite } (AP) \text{ est perpendiculaire à la tangente à } \Gamma \text{ en } P.}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.