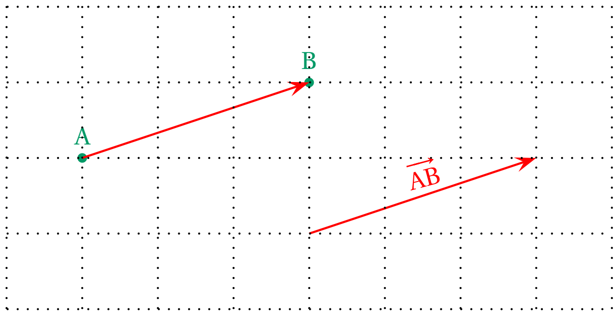
# FICHE n° 19. VECTEURS DU PLAN.

## I « Définition » des vecteurs

Un déplacement en ligne droite d'un point $\mathrm{A}$ jusqu'à un point $\mathrm{B}$ distinct de $\mathrm{A}$, est représenté par une flèche. Cette flèche est le **vecteur** de la translation qui envoie le point $\mathrm{A}$ en le point $\mathrm{B}$. Ce vecteur se note $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.




$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est le vecteur d'**origine** $\mathrm{A}$ et d'**extrémité** $\mathrm{B}$.

**Définition 1**

Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ces deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même longueur.

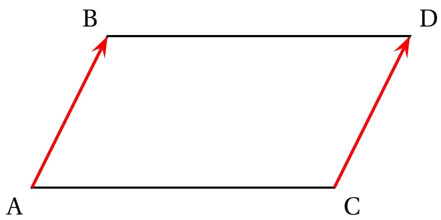
Quand des vecteurs sont égaux ($\overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \overrightarrow{\mathrm{BB'}} = \overrightarrow{\mathrm{CC'}} = \ldots$), on leur donne un nom qui n'utilise qu'une seule lettre : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \overrightarrow{\mathrm{BB'}} = \overrightarrow{\mathrm{CC'}}$.

Quand $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est le **vecteur nul**. Il se note $\overrightarrow{0}$. (Ainsi, pour tout point $\mathrm{A}$, $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{0}$).

**Théoreme 1**

Soient $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$, $\mathrm{C}$ et $\mathrm{D}$ quatre points deux à deux distincts.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ équivaut au fait que $\mathrm{ABDC}$ est un parallélogramme (attention à l'ordre des points).




**Théoreme 2**

Soient $\mathrm{O}$ un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un point $\mathrm{M}$ et un seul tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{u}$.

## II Norme d'un vecteur

**Définition 2**

La norme d'un vecteur est sa longueur. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $\|\overrightarrow{u}\|$.

En particulier, la norme du vecteur nul est $0$ : $\left\|\overrightarrow{0}\right\| = 0$.

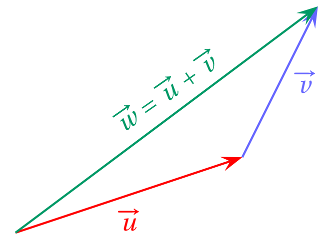
 

# III Opérations sur les vecteurs

## A Somme de deux vecteurs. Relation de Chasles

**Définition 3**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. La **somme** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ de la translation résultant de l'enchainement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On note alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.




En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, on obtient la relation de Chasles :

**Théoreme 3**

Pour tous points $A$, $B$ et $C$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Les règles de calcul usuelles sont :

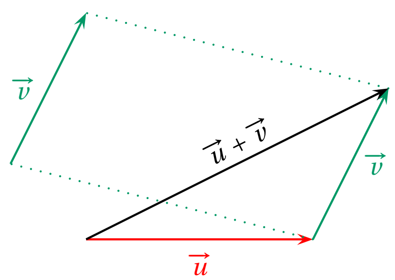
**Théoreme 4**

**1)** Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

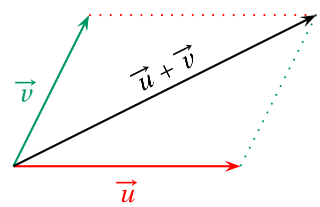
**2)** Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$.

**3)** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

On doit savoir construire la somme de deux vecteurs dans deux situations. Quand les vecteurs s'enchainent (situation I) et quand les vecteurs ont même origine (situation II). Dans ce cas, la somme des deux vecteurs est la diagonale orientée du parallélogramme bâti sur ces deux vecteurs.




Situation I




Situation II

## B Opposé d'un vecteur. Différence de deux vecteurs

**Définition 4**

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. L'**opposé** de $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui a même direction que $\overrightarrow{u}$, même longueur et sens opposé.

D'autre part, l'opposé du vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul lui-même : $-\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

**Théoreme 5**

Soient $A$ et $B$ deux points. Alors, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

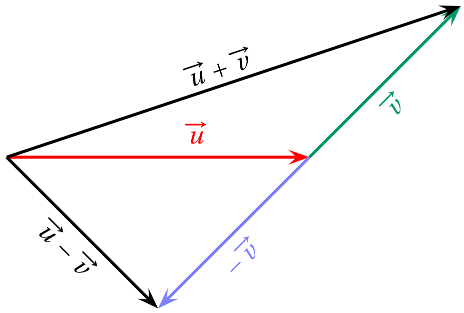
**Théoreme 6**

Soit $\vec{u}$ un vecteur. $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$.
Plus précisément, pour tout vecteur $\vec{v}$, l'égalité $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ équivaut à $\vec{v}=-\vec{u}$.

**Définition 5**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La **différence** $\vec{u}-\vec{v}$ est la somme de $\vec{u}$ et de $-\vec{v}$ :

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right).$$




**Théoreme 7**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ équivaut à $\vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$.

**Théoreme 8**

(Caractérisation du milieu d'un segment).

Soient $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ deux points du plan. Soit $\mathrm{I}$ un point du plan.

$\mathrm{I}$ est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\vec{0}$.
$\mathrm{I}$ est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IB}}=-\overrightarrow{\mathrm{IA}}$.

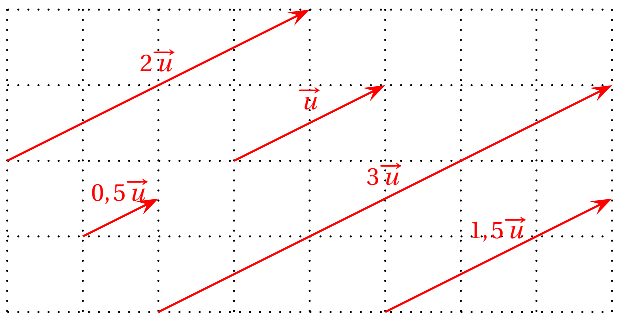
## C Multiplication d'un vecteur par un réel

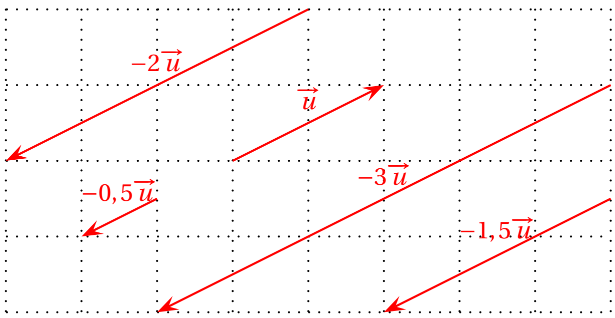
**Définition 6**

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et $k$ un réel non nul.

- si $k>0$, $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même sens que $\vec{u}$ et dont la longueur est $k$ fois la longueur de $\vec{u}$.
- si $k<0$, $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction que $\vec{u}$, un sens contraire à $\vec{u}$ et dont la longueur est $-k$ fois la longueur de $\vec{u}$.

Enfin, on pose pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u}=\vec{0}$ et pour tout réel $k$, $k\vec{0}=\vec{0}$.



**Théoreme 9**

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel $k$, $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.

Pour tous points $A$ et $B$ et tout réel $k$, $\left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \times AB$.

**Théoreme 10**

Soient $A$ et $B$ deux points. Soit $I$ un point du plan.

$I$ est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
$I$ est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Théoreme 11**

**1)** Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tout réel $k$, $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$ et $k\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u}-k\overrightarrow{v}$.

**2)** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tous réels $k$ et $k'$, $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}+k'\overrightarrow{u}$ et $(k-k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}-k'\overrightarrow{u}$.

**3)** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tous réels $k$ et $k'$, $k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = (kk')\overrightarrow{u}$.

**4)** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

**5)** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

## D Vecteurs colinéaires

**Définition 7**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** (on dit aussi $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

Par convention, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

**Théoreme 12**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel non nul $k$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

**Théoreme 13**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan deux à deux distincts.

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Définition 8**

Soit $(D)$ une droite.

Un **vecteur directeur** de la droite $(D)$ est un vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où $A$ et $B$ sont deux points distincts de la droite $(D)$.

**Théoreme 14**

Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites.

Les droites $(D)$ et $(D')$ sont parallèles si et seulement si il existe un vecteur directeur de $(D)$ et un vecteur directeur de $(D')$ qui sont colinéaires.

De plus, si les droites $(D)$ et $(D')$ sont parallèles, tout vecteur directeur de $(D)$ est colinéaire à tout vecteur directeur de $(D')$.