Planche n$^{\text{o}}$ 19. Applications linéaires continues. Normes subordonnées. Corrigé

Exercice n$^{\text{o}}$ 1

1) • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} = \text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.

• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \text{ Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda|\|P\|_\infty$.

• Soient $P = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

2) $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et en particulier $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$. Puisque f est un endomorphisme de E, ceci montre que f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$.

$$\boxed{f \in \mathscr{L}_c(E, \|\ \|_\infty).}$$

De plus, pour tout $P \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$ et donc $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty},\ P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$. Donc,

$$\boxed{|||f||| = 1.}$$

Exercice n$^{\text{o}}$ 2

• La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Puisque Δ est un endomorphisme de E, ceci montre que Δ est continu sur E. Ensuite, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$. 2 est un majorant de $\left\{\dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty},\ u \in E \setminus \{0\}\right\}$ et $|||\Delta|||$ est le plus petit de ces majorants. Donc $|||\Delta||| \leqslant 2$. De plus, si u est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors u est un élément de E tel que, $|\Delta(u)|_\infty = 2\|u\|_\infty$ et donc $|||\Delta||| = \text{Max}\left\{\dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty},\ u \in E \setminus \{0\}\right\} = 2$.

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}_c(E) \text{ et } |||\Delta||| = 2.}$$

• La linéarité de C est claire et de plus C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Puisque C est un endomorphisme de E, ceci montre que C est continu sur E et que $|||C||| \leqslant 1$. De plus, si u est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, alors u est un élément de E tel que, $|C(u)|_\infty = \|u\|_\infty$ et donc $|||C||| = \text{Max}\left\{\dfrac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty},\ u \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$.

$$\boxed{C \in \mathscr{L}_c(E) \text{ et } |||C||| = 1.}$$

Exercice n° 3

1) a) Soit $f \in E$, f est continue sur $[0,1]$ et donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est définie et continue sur $[0,1]$. Donc, T est beffectivement une application de E vers E. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt = \lambda \int_0^x f(t)\ dt + \mu \int_0^x g(t)\ dt = (\lambda Tf + \mu Tg)(x)$$

et donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$. On a montré que $T \in \mathscr{L}(E)$.

b) Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$. f est une application continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $\int_0^x f(t)\ dt = 0$. En dérivant, on obtient pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et donc T est injectif.

Pour tout $f \in E$, $T(f)$ est une fonction dérivable sur $[0,1]$. La fonction $f\ :\ x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$ est un élément de E qui n'est pas dérivable sur $[0,1]$ car non dérivable en $\frac{1}{2}$. f est donc un élément de E qui n'a pas d'antécédent par T. T n'est pas surjectif.

c) D'après b), 0 n'est pas valeur propre de T. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} Tf = \lambda f &\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ \int_0^x f(t)\ dt = \lambda f(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) = \lambda f'(x) \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \\ &\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $f_\lambda\ :\ x \mapsto e^{\frac{x}{\lambda}}$. $Tf(0) = 0 \neq 1 = f_\lambda(0)$ et donc $Tf \neq \lambda f$. Donc, λ n'est pas valeur propre de T. On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) = \varnothing.}$$

2) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)|\ dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\ dt\right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\ dt\right) dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\ dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\ dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall f \in E$, $\|Tf\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Puisque que T est un endomorphisme de E, ceci montre que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n\ dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n\ dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)|\ dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\ dx = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||T||| \geqslant \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{|||T||| = 1.}$$

4) Supposons qu'il existe $f \in E\setminus\{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 2) est une égalité et en particulier $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = 0$.

Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc la borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice n° 4

• Pour $\|\ \|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\text{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,
\end{aligned}$$

en notant $C_1,\ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\} \leqslant \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Soit alors $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1 de sorte que $AX_0 = C_{j_0}$. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}| = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X_0\|_1.$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

On en déduit que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\} = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}.}$$

• Pour $\|\ \|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\
&\leqslant \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\times\|X\|_\infty,
\end{aligned}$$

en notant $L_1,\ldots, L_n$ les lignes de la matrice A. Donc,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\} \leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

Soit alors $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1,1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j |a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \dfrac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$).

$$\begin{aligned}
\|AX_0\|_\infty &= \text{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\
&\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \|X_0\|_\infty.
\end{aligned}$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

On en déduit que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_\infty = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.}$$

Exercice n° 9

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.

On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $\text{Sup}\left\{\dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(D)$.

Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^T$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|AX\|_2 &= \left\|PDP^TX\right\|_2 \\
&= \left\|D\left(P^TX\right)\right\|_2 \ \text{(car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\
&= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = P^TX.
\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto P^TX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice P^T est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \left\|P^TX\right\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\dfrac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$\text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \text{Sup}\left\{\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$