Planche n° 19. Applications linéaires continues. Normes subordonnées

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (*)

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) Vérifier que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.

2) Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E$, $f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \| \ \|_\infty)$ et préciser $|||f|||$.

Exercice n° 2 (**)

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E,\ C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \| \ \|_\infty)$ et préciser $|||\Delta|||$ et $|||C|||$.

Exercice n° 3 (* I)**

On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

On pose $\begin{array}{cccccccc} T: & E & \to & E & & & & \\ & f & \mapsto & Tf: & [0,1] & \to & \mathbb{R} & \\ & & & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \end{array}$. -

1) a) Démontrer que T est un endomorphisme de E.
b) T est-il injectif ? surjectif ?
c) Déterminer le spectre de T.

2) Démontrer que T est continu sur $(E, \| \ \|_1)$.

3) Déterminer $|||T|||$.

4) Montrer que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice n° 4 (***)

On pose pour tout $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |x_i|$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $|||A|||_1 = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et $|||A|||_\infty = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

Exercice n° 5 (I)**

Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et on note $|||A|||_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ (en particulier, l'application $A \mapsto \rho(A)$ est une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$).