Planche n$^{\text{o}}$ 18. Variables aléatoires. Corrigé

Exercice n$^{\text{o}}$ 1

1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1} = p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k,$$

et donc aussi $\mathbb{P}(X_i > k) = (1-p)^k$.

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $X > k \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i > k$ ou encore $(X > k) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (X_i > k)$. Puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$, sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(X > k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > k) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^k = (1-p)^{kn}.$$

Cette égalité reste vraie quand $k = 0$ car $\mathbb{P}(X > 0) = 1 = (1-p)^0$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $k-1 \in \mathbb{N}$ puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\{X > k-1\} \setminus \{X > k\}) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^{(k-1)n} - (1-p)^{kn} \\ &= (1-(1-p)^n)(1-p)^{(k-1)n} = (1-(1-p)^n)\left((1-p)^n\right)^{k-1}\end{aligned}$$

Puisque $(1-p)^n \in]0, 1[$, X suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^n$.

b) On sait alors que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{1-(1-p)^n}$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2

1) Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \geqslant 0$ et de plus, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \underset{j \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées.

Donc, la série de terme général $\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$, $j \in \mathbb{N}$, converge. De plus, en posant $S_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}$,

$$\begin{aligned}2S_i &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j-1}} = \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j-1}} = \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i+k+1}{2^{i+k}} = \frac{i}{2^{i-1}} + S_i + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+k}} \\ &= S_i + \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = S_i + \frac{i+1}{2^{i-1}},\end{aligned}$$

et donc $S_i = \dfrac{i+1}{2^{i-1}}$. De nouveau, la série de terme général $S_i = \dfrac{i+1}{2^{i-1}}$ converge et en posant $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} S_i$,

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+1}{2^{i-2}} = 4 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i+1}{2^{i-2}} = 4 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1+1}{2^{k-1}} \\ &= 4 + S + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 4 + S + 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = S + 8,\end{aligned}$$

et donc $S = 8$.

En résumé,

- $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \geqslant 0$;
- $\forall i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} < +\infty$;

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right) < +\infty$.

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. De plus

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\frac{i+j}{2^{i+j}} = 8.}$$

2) a) Pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, posons $p_{i,j} = \dfrac{i+j}{2^{i+j+3}} = \dfrac{1}{8}\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$. D'après la question précédente, la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et de plus, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j} = 1$. Donc, les relations de l'énoncé définissent bien une loi de couple.

b) Soit $i\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right] = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\\ &= \frac{1}{8}\frac{i+1}{2^{i-1}} \text{ (d'après la question précédente)}\\ &= \frac{i+1}{2^{i+2}}.\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{j+1}{2^{j+2}}$.

$$\forall i\in\mathbb{N},\ P(X=i) = \frac{i+1}{2^{i+2}} \text{ et } \forall j\in\mathbb{N},\ P(Y=j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}.$$

c) $P[(X=0)\cap(Y=0)] = \dfrac{0+0}{2^3} = 0$ et $P(X=0)\times P(Y=0)\neq 0$. Ainsi, $P[(X=0)\cap(Y=0)]\neq P(X=0)\times P(Y=0)$ et donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice n° 3

On sait que $\mathbb{E}(X)=\lambda$ et $\mathbb{V}(X)=\lambda$. Ensuite, $\{X\geqslant\lambda+1\} = \{X-\lambda\geqslant 1\}\subset\{|X-\lambda|\geqslant 1\} = \{|X-E(X)|\geqslant 1\}$ et donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(X\geqslant\lambda+1)\leqslant\mathbb{P}\{|X-E(X)|\geqslant 1\}\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{1^2} = \lambda.$$

Exercice n° 4

On sait que $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=P(Y=k)=p(1-p)^{k-1}$.

Tout d'abord, $Z(\Omega)=\mathbb{N}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}P(Z=0) = P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k,Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)\times P(Y=k) \text{ (car X et Y sont indépendantes}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}p^2\left((1-p)^2\right)^{k-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \text{ (car } (1-p)^2\in]0,1[)\\ &= \frac{p}{2-p}.\end{aligned}$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $P(Z=k) = P((Y-X=k)\cup(X-Y=k)) = P(Y-X=k)+P(X-Y=k)$ (les événements $\{Y-X=k\}$ et $\{X-Y=k\}$ sont disjoints car $k\neq 0$ puis, par symétrie des rôles de X et Y, $P(Z=k) = 2P(Y=X+k)$. Par suite,

$$\begin{aligned}P(Z=k) &= 2\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j, Y=k+j) = 2\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j)\times P(Y=k+j) \text{ (car X et Y sont indépendantes)}\\ &= 2\sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}p(1-p)^{k+j-1} = 2p(1-p)^k\sum_{j=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{j-1}\\ &= \frac{2p^2(1-p)^k}{1-(1-p)^2} = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.\end{aligned}$$

En résumé, $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(|X-Y|=k) = \begin{cases} \dfrac{p}{2-p} \text{ si } k=0 \\ \dfrac{2p(1-p)^k}{2-p} \text{ si } k\geqslant 1\end{cases}$. Ensuite,

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Z=k) = \frac{2p(1-p)}{2-p}\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

On sait que pour tout $x\in]-1,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ puis, par dérivation, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Puisque $1-p\in]0,1[$,

$$E(Z) = \frac{2p(1-p)}{2-p}\times\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{2(1-p)}{(2-p)^2}.$$

Exercice nº 5

1) $(U,V)(\Omega) = \left\{(k,l)\in\mathbb{N}^2/\ k\geqslant l\right\}$. En posant $q=1-p$,

• Soit $k\in\mathbb{N}$. Puisque les variables X et Y sont indépendantes,

$$P(U=k, V=k) = P(X=k, Y=k) = P(X=k)\times P(Y=k) = p^2q^{2k}.$$

• Soit $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k>l$.

$$P(U=k, V=l) = P((X=k, Y=l)\cup(X=l, Y=k)) = 2P(X=k)\times P(Y=l) = 2p^2q^{k+l}.$$

En résumé, pour tout $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k\geqslant l$, $P((U,V)=(k,l)) = \begin{cases} p^2q^{2k} \text{ si } k=l \\ 2p^2q^{k+l} \text{ si } k>l\end{cases}$.

2)

• $U(\Omega)=\mathbb{N}$. Ensuite, $P(U=0) = P(X=0, Y=0) = (P(X=0))^2 = p^2$. Soit alors $k\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}P(U=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(U=k, V=j) = p^2q^{2k} + \sum_{j=0}^{k-1} 2p^2q^{k+j}\\ &= p^2q^{2k} + 2p^2q^k\frac{1-q^k}{1-q} = p^2q^{2k} + 2pq^k\left(1-q^k\right) = pq^k\left(pq^k+2-2q^k\right),\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $k=0$. Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(U=k) = pq^k\left(pq^k+2-2q^k\right)$.

• $V(\Omega)=\mathbb{N}$. Ensuite, pour $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(V=k) &= \sum_{j=k}^{+\infty} P(U=j, V=k) = p^2q^{2k} + \sum_{j=k+1}^{+\infty} 2p^2q^{k+j}\\ &= p^2q^{2k} + 2p^2q^{2k+1}\frac{1}{1-q} = p^2q^{2k} + 2pq^{2k+1} = pq^{2k}(p+2q) = pq^{2k}(1+q).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(V=k) = pq^{2k}(1+q)$.

3) $W(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$P(W=k) = P(V=k-1) = pq^{2(k-1)}(1+q) = (1-q)(1+q)\left(q^2\right)^{k-1} = \left(1-q^2\right)\left(q^2\right)^{k-1}.$$

Donc, $W = V + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = 1 - (1-p)^2 = p(2-p) \in]0,1[$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) - 1 = \frac{1}{1-q^2} - 1 = \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{(1-p)^2}{p(2-p)}.$$

Exercice n° 6

1er calcul. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ et $P(Y = k) = \dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$. Donc, $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ puis, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \times P(Y=k-i) \text{ (car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \times \frac{\mu^{k-i}}{k!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} \\
&= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}.
\end{aligned}$$

Donc, $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2ème calcul. On sait que pour tout réel t, $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y(t) = \mathbb{E}\left(t^Y\right) = e^{\mu(t-1)}$. Pour tout réel t, les variables t^X et t^Y sont indépendantes puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} P(X+Y=k)t^k &= E\left(t^{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(t^X \times t^Y\right) \\
&= E\left(t^X\right) \times \mathbb{E}\left(t^Y\right) \text{ (car X et Y sont indépendantes)} \\
&= e^{\lambda(t-1)} \times e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}t^k.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X+Y=k) = \dfrac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}$. On retrouve le fait que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice n° 7

1) • Si on note $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de M alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = X_jC$ où $C = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Donc, $\text{rg}(M) \leqslant 1$ (car l'espace engendré par les colonnes de M est contenu dans $\text{Vect}(C)$). De plus, si tous les X_j sont nuls, $\text{rg}(M) = 0$ et si l'un des X_j n'est pas nul, $\text{rg}(M) = 1$ (car le coefficient ligne j, colonne j n'est pas nul).

Ainsi, $R(\Omega) = \{0,1\}$ puis $\{R = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}$. Les variables X_i étant indépendantes,

$$P(R=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = 0\right) = (1-p)^n$$

et donc aussi $P(R = 1) = 1 - (1-p)^n$. R suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

• $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i$. T est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et on sait alors que T suit la loi binomiale de paramètres n et p :

$$T(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(T=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

2) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de M^2 est

$$\sum_{k=1}^{n} X_iX_kX_kX_j = X_iX_j\sum_{i=1}^{n} X_k^2 = X_iX_jT,$$

et donc $M^2 = TM$. Par suite,

$$M \text{ idempotente} \Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow TM = M \Leftrightarrow (T-1)M = 0 \Leftrightarrow T = 1 \text{ ou } M = 0 \Leftrightarrow T = 1 \text{ ou } R = 0.$$

Les événements $\{R = 0\}$ et $\{T = 1\}$ étant disjoints, on en déduit que

$$P\left(M \text{ idempotente}\right) = P(R = 0) + P(T = 1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1-p)^{n-1}((n-1)p+1).$$

Exercice n° 8

1) Soit $t \in]-2, 2[$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2-t)^\alpha} &= 2^{-\alpha}\left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-\alpha} = 2^{-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\alpha}{n}\left(-\frac{t}{2}\right)^n \\ &= 2^{-\alpha}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\binom{-\alpha}{n}t^n\right).\end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(-1)^n\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-(n-1))}{n!} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(n-1))}{n!}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = \begin{cases} 2^{-\alpha} \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(n-1))}{n!}2^{-\alpha-n} \text{ si } n \geqslant 1\end{cases}$. Les p_n, $n \in \mathbb{N}$, sont des réels positifs tels que, pour tout $t \in]-2, 2[$, $\dfrac{1}{(2-t)^\alpha} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_n t^n$. Mais alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n = \frac{1}{(2-1)^\alpha} = 1.$$

On peut donc considérer X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$. Pour une telle variable aléatoire, pour tout $t \in]-2, 2[$, $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.

2) On suppose de plus que $\alpha = p \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de Stirling, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{p(p+1)\dots(p+(n-1))}{n!} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!n!} \\ &\sim \frac{1}{(p-1)!}\frac{\left(\dfrac{n+p-1}{e}\right)^{n+p-1}\sqrt{2\pi(n+p-1)}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{e^{p-1}(p-1)!}\frac{(n+p-1)^{n+p-1}}{(n)^n} \\ &\sim \frac{n^{p-1}}{e^{p-1}(p-1)!}\frac{(n+p-1)^n}{(n)^n} \text{ (car } p \text{ est constant quand } n \text{ varie)} \\ &= \frac{n^{p-1}}{e^{p-1}(p-1)!}e^{n\ln\left(1+\frac{p-1}{n}\right)} = \frac{n^{p-1}}{e^{p-1}(p-1)!}e^{p-1+o(1)} \\ &\sim \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.\end{aligned}$$

Donc, $P(X = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.

3) On sait que X admet une espérance et une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, ce qui est le cas. De plus,

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \frac{\alpha}{(2-1)^{\alpha+1}} = \alpha.$$

Ensuite, pour tout réel $t \in]-2, 2[$, $G_X''(t) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(2-t)^{\alpha+2}}$ et donc

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2 = \alpha(\alpha+1) + \alpha - \alpha^2 = 2\alpha.$$

Ensuite, pour $\lambda > 0$, $\{X \geqslant \lambda + \alpha\} = \{X - \alpha \geqslant \lambda\} \subset \{|X - \alpha| \geqslant \lambda\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda\}$ et donc, d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

$$P(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{2\alpha}{\lambda^2}.$$

Exercice n° 9

1) a) $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les variables X et Y sont indépendantes,

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

On sait que les rayons de convergence des deux séries entières de sommes respectives G_X et G_Y sont au moins égaux à 1. On peut effectuer leur produit de CAUCHY sur $]-1,1[$ (au moins). Pour tout $t \in]-1,1[$,

$$G_X(t)G_Y(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)\right)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)t^n = G_{X+Y}(t).$$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, si $X_1, \ldots, X_n$, sont n variables aléatoires indépendantes (sur un même espace probabilisé) à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.

- Le résultat est vrai pour $n = 2$ d'après a).
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat pour n. Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$, $n+1$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après le lemme des coalitions, les variables $X_1 + \ldots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes et donc, pour tout réel $t \in]-1,1[$

$$G_{X+1+\ldots+X_n+X_{n+1}}(t) = G_{X_1+\ldots+X_n}(t) \times G_{X_{n+1}}(t) = \prod_{k=1}^{n+1} G_{X_k}(t).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k le numéro de la boule obtenue au k-ème tirage. Alors, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Puisque les tirages se font sans remise, les variables X_k sont mutuellement indépendantes. D'après 1), pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.

Puisque S_n et les X_k prennent un nombre fini de valeurs, G_{S_n} et $\prod_{k=1}^{n} G_{X_k}$ sont des polynômes. Ces polynômes coïncident en une infinité de valeurs et ils sont donc égaux.

Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $t \in]\mathbb{R}$.

$$G_{X_k}(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} = \frac{(t+1)^2}{4}.$$

Donc, pour tout réel t, $G_{S_n}(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^{2n}$. Mais alors, pour tout réel t,

$$G_{S_n}(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}t^k.$$

Par identification des coefficients, on obtient $S_n(\Omega) = [\![0,2n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$,

$$P(S_n = k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{4^n} = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

S_n suit la loi $\mathscr{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.