# Planche n° 18. Variables aléatoires

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

**Exercice n° 1 (*** I)**

Soit $p \in ]0,1[$ puis $q = 1 - p$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $X_1$, ..., $X_n$, $n$ variables aléatoires réelles indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p$.

**1)** Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité des événements $(X_i \leqslant k)$ et $(X_i > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**2)** On pose $X = \text{Min}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

**a)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$. En déduire la loi de $X$.

**b)** Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

**Exercice n° 2 (***)** (d'après CCP 2016 MP Maths 1)

**1)** Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

**2)** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple $(X, Y)$ est définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X,Y) = (i,j)) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

**a)** Vérifier que les relations ci-dessus définissent bien une loi conjointe.

**b)** Déterminer les lois des variables $X$ et $Y$.

**b)** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice n° 3 (**)**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.

**Exercice n° 4 (***)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X$ et $Y$ suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ et que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

Soit $Z = |X - Y|$. Déterminer la loi de $Z$ et son espérance.

**Exercice n° 5 (***)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires entières sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendantes et que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k$$

où $p \in ]0,1[$.

On pose $U = \text{Max}\{X, Y\}$ et $V = \text{Min}\{X, Y\}$.

**1)** Déterminer la loi du couple $(U, V)$.

**2)** Déterminer les lois marginales du couple $(U, V)$.

**3)** Vérifier que la variable $W = V + 1$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance de $V$.

**Exercice n° 6 (** I)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Déterminer la loi de $X+Y$ par deux méthodes différentes (par un calcul direct ou par l'utilisation des fonctions génératrices).

**Exercice n° 7 (***)**

Soient $n \geqslant 2$ puis $X_1$, ..., $X_n$, $n$ variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que les variables $X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$.

On définit la matrice aléatoire $M = (X_iX_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

**1)** Déterminer la loi du rang $\mathsf{R}$ de la matrice $\mathsf{M}$ et de la trace $\mathsf{T}$ de la matrice $\mathsf{M}$.

**2)** Déterminer la probabilité que la matrice $\mathsf{M}$ soit une matrice de projection.

**Exercice n° 8 (***)**

**1)** Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X$ telle que pour tout $t \in ]-2, 2[$, $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.

**2)** Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, donner un équivalent de $P(X = n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**3)** Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

**Exercice n° 9 (***)** (d'après CCP 2019 MP Maths 1)

**1) a)** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ en fonction des lois de $X$ et $Y$ et en déduire que pour tout $t \in ]-1, 1[$,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

**b)** Généraliser le résultat à $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes.

**2)** Un sac contient quatre boules : une boule numérotée $0$, deux boules numérotées $1$ et une boule numérotée 2.
On effectue $n$ tirages d'une boule avec remise et on note $S_n$ la somme des numéros tirés.

Déterminer $G_{S_n}$ et en déduire la loi de $S_n$.