# Chapitre 18. La loi normale

Ce chapitre va vous paraître difficile en première lecture car les notions exposées, les différentes formules ou expressions mathématiques rencontrées ont un aspect rebutant. Rassurez-vous. Ce que vous devrez effectivement savoir faire au bout du compte est simple. **Les principales activités issues de ce chapitre consistent en l'utilisation de la calculatrice et pas grand chose de plus.** L'essentiel de ce qu'on doit savoir faire est contenu dans les trois exercices placés en fin de chapitre.

## *I. Le théorème de* Moivre-Laplace

Pour chaque $n$ entier naturel non nul et $p$ réel de $]0,1[$, on considère une variable aléatoire que l'on note $X_n$ suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

On rappelle que l'espérance de $X_n$ est $E(X_n) = np$, la variance de $X_n$ est $V(X_n) = np(1-p)$ et l'écart-type de $X_n$ est $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$.

Considérons les variables aléatoires $Y_n = X_n - np$ puis $Z_n = \dfrac{Y_n}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour alléger les notations, on peut poser $\mu_n = np = E(X_n)$ et $\sigma_n = \sqrt{np(1-p)} = \sigma(X_n)$. On a alors

$$Y_n = X_n - \mu_n \text{ et } Z_n = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}.$$

On sait que de manière générale, si $X$ est une variable aléatoire et $a$ et $b$ sont deux réels, l'espérance de $aX+b$ est $E(aX+b) = aE(X)+b$, la variance de $aX+b$ est $V(aX+b) = a^2V(X)$ et l'écart-type de $aX+b$ est $\sigma(aX+b) = a\sigma(X)$.

Donc l'espérance de $Y_n$ est

$$E(Y_n) = E\left(X_n - \mu_n\right) = E(X_n) - \mu_n = 0.$$

En retranchant à $X_n$ son espérance, on a obtenu une variable aléatoire $Y_n$ d'espérance nulle. On dit que l'on a **centré** la variable $X_n$. D'autre part, la variance ou l'écart-type n'ont pas changé ou encore

$$V(Y_n) = V(X_n) = \sigma_n^2 \text{ et } \sigma(Y_n) = \sigma(X_n) = \sigma_n.$$

Passons à la variable aléatoire $Z_n$. L'espérance de $Z_n$ est toujours nulle car $E(Z_n) = \dfrac{1}{\sigma_n}E(Y_n) = 0$. Par contre, la variance et l'écart-type ont changé :

$$V(Z_n) = \frac{1}{\sigma_n^2}V(Y_n) = 1 \text{ et } \sigma(Z_n) = \frac{1}{\sigma_n}\sigma(Y_n) = 1$$

et donc la variance de $Z_n$ est égale à 1 puis l'écart-type de $Z_n$ est égal à 1. En divisant $Y_n$ par son écart-type, on a obtenu une variable aléatoire d'écart-type égal à 1. On dit que l'on a **réduit** la variable $Y_n = X_n - \mu_n$.

Au total, quand on a retranché à $X_n$ son espérance puis que l'on a divisé la variable obtenue par l'écart-type, on a **centré et réduit** la variable $X_n$. La variable $Z_n$ est appelée : **la variable centrée réduite associée à la variable** $X_n$.

Considérons par exemple le cas $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On rappelle que pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}.$$

D'autre part, $X_n = k \Leftrightarrow Y_n = k - \mu_n \Leftrightarrow Z_n = \dfrac{k-\mu_n}{\sigma_n}$. Les valeurs prises par les variables $Y_n$ ou $Z_n$ ne sont plus les mêmes que les valeurs prises par la variable $X_n$ mais les probabilités elles n'ont pas changé :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = P(Y_n = k - np) = P\left(Z_n = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

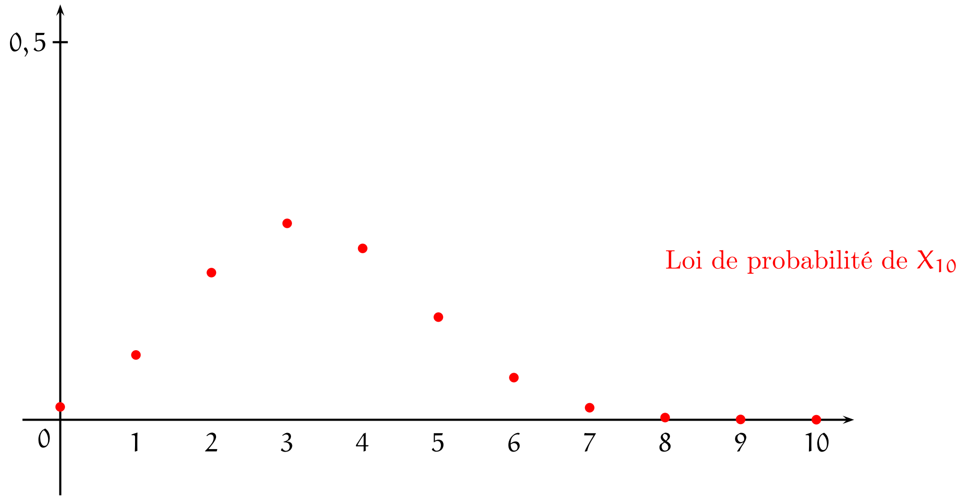
On note $z_0$, $z_1$, ..., $z_{10}$ les valeurs prises par la variable $Z_{10}$. Donc, $z_0 = \dfrac{0 - \frac{10}{3}}{\sqrt{10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}}$, $z_1 = \dfrac{1 - \frac{10}{3}}{\sqrt{10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}}$ et de manière générale, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

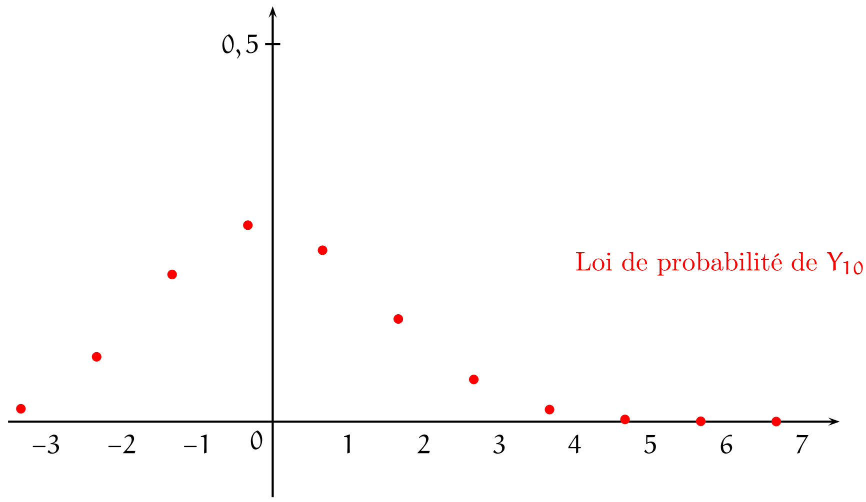
$$z_k = \frac{k - \mu_n}{\sigma_n}.$$

On donne les valeurs de $X_{10}$, $Y_{10}$ et $Z_{10}$ et des $p(X_{10} = k)$ dans un tableau. Les valeurs ci-dessous sont des valeurs approchées.

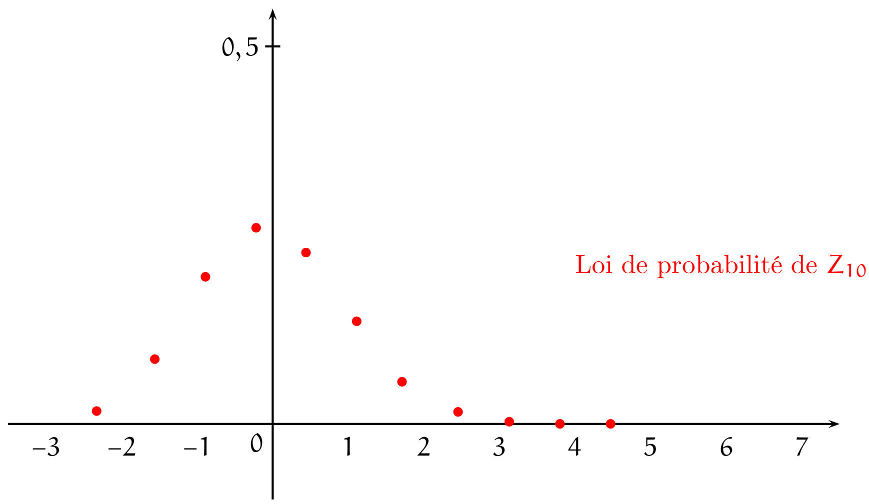
| $X_{10}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X_{10} = k)$ | $0,017$ | $0,086$ | $0,195$ | $0,260$ | $0,227$ | $0,136$ | $0,056$ | $0,016$ | $0,003$ | $0,0003$ | $0,00001$ |
| $Y_{10}$ | $-3,33$ | $-2,33$ | $-1,33$ | $-0,33$ | $0,66$ | $1,66$ | $2,66$ | $3,66$ | $4,66$ | $5,66$ | $6,66$ |
| $Z_{10}$ | $-2,23$ | $-1,56$ | $-0,89$ | $-0,22$ | $0,44$ | $1,11$ | $1,71$ | $2,45$ | $3,13$ | $3,80$ | $4,47$ |

On représente graphiquement les lois de probabilités. En abscisse, on place les valeurs prises par $X_{10}$ (ou $Y_{10}$ ou $Z_{10}$) et en ordonnée, on place les probabilités corresondantes.




L'espérance est maintenant nulle et l'écart-type est toujours égal à $\sqrt{10 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{20}{9}} = 1,49\ldots$



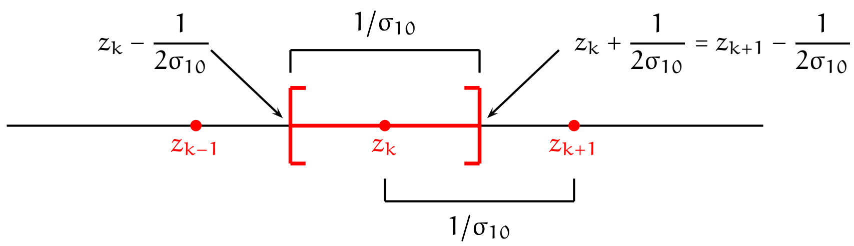

La moyenne est nulle et l'écart-type est maintenant égal à 1. Puisque l'écart-type a diminué, les valeurs se sont resserrées autour de la moyenne.

La variable $Z_{10}$ prend un nombre fini de valeurs $z_0$, $z_1$, ..., $z_{10}$. C'est une variable discrète et même une variable finie. Entre deux valeurs consécutives prise par Z, la distance est

$$z_{k+1} - z_k = \frac{k+1-\mu_n}{\sigma_n} - \frac{k-\mu_n}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_n}.$$

Plus précisément, la distance entre deux valeurs prises par la variable $Z_{10}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{20}{9}}} = 0,67\dots$

Le milieu du segment $[z_k, z_{k+1}]$ est $z_k + \dfrac{1}{2\sigma_n}$ ou aussi $z_{k+1} - \dfrac{1}{2\sigma_n}$.




On note alors que la seule valeur prise par la variable $Z_n$ dans l'intervalle $\left[z_k - \dfrac{1}{2\sigma_n}, z_k + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right]$ est la valeur $z_k$. Par suite,

$$P\left(Z_k = z_k\right) = P\left(z_k - \frac{1}{2\sigma_n} \leqslant Z_k \leqslant z_k + \frac{1}{2\sigma_n}\right).$$

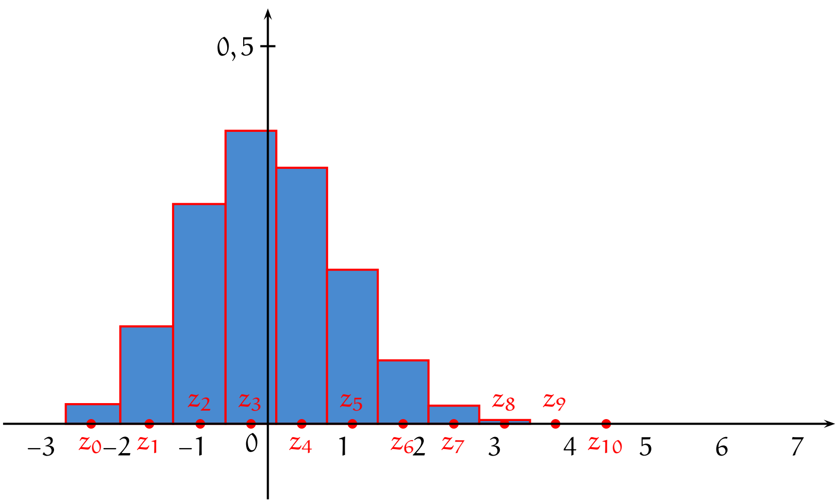
On sait que les probabilités du type $P\left(z_k - \dfrac{1}{2\sigma_n} \leqslant Z_k \leqslant z_k + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right)$ peuvent se représenter par un histogramme où les probabilités sont les aires des rectangles dessinés. C'est ce qu'on va faire.

La largeur de chaque rectangle est $\dfrac{1}{\sigma_n} = 0,67\dots$. Pour que l'aire d'un rectangle soit $P\left(z_k - \dfrac{1}{2\sigma_n} \leqslant Z_k \leqslant z_k + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right)$ ou encore $P(Z_n = z_k)$, il faut et il suffit que la longueur du rectangle soit $\sigma_n \times P(Z_n = z_k)$. On construit donc un rectangle dont la base est centrée sur $z_k$ de largeur $\dfrac{1}{\sigma_n}$ et de longueur $\sigma_n \times P(Z_n = z_k)$.

On donne dans un tableau les valeurs des $z_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 10$ et les valeurs des $\sigma_{10} \times P(Z_{10} = z_k)$.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_{10}$ | $-2,23$ | $-1,56$ | $-0,89$ | $-0,22$ | $0,44$ | $1,11$ | $1,71$ | $2,45$ | $3,13$ | $3,80$ | $4,47$ |
| $\sigma_{10} \times P(Z_{10} = z_k)$ | $0,025$ | $0,129$ | $0,290$ | $0,387$ | $0,339$ | $0,203$ | $0,084$ | $0,024$ | $0,004$ | $0,0005$ | $0,00002$ |

On peut alors construire l'histogramme.

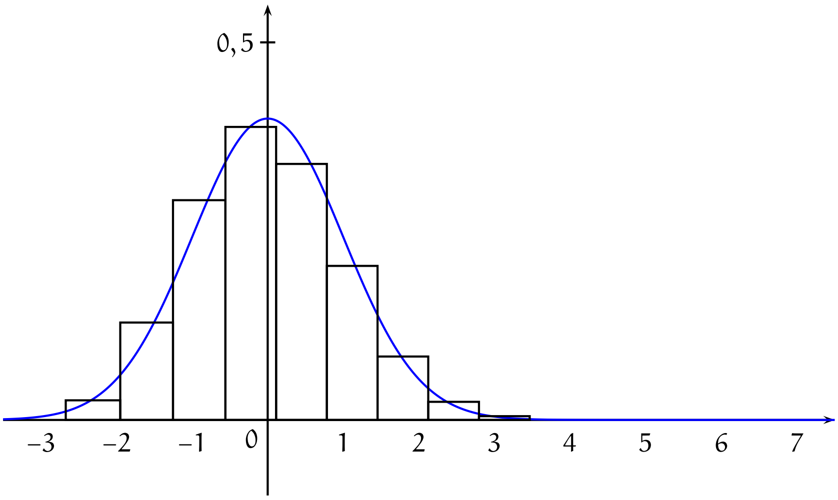



Notons que quand on additionne les aires de tous les rectangles, on trouve 1. Plus généralement, quand on additionne les aires d'un certain nombre de rectangles consécutifs mais pas tous, on trouve une probabilité du type $P(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

Faisons maintenant varier $n$ puis faisons tendre $n$ vers $+\infty$. Puisque $\sigma_n = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}}$, $\sigma_n$ tend vers $+\infty$ puis $\dfrac{1}{\sigma_n}$ tend vers 0. Ainsi, la largeur des rectangles de l'histogramme tend vers 0 et les rectangles « deviennent des traits ».

On peut démontrer grâce à des techniques dépassant largement le cadre du programme de Terminale S que l'histogramme « tend » vers le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ci-dessous, nous avons construit le graphe de la fonction $f$ et reproduit l'histogramme associé à $Z_{10}$.




Puisque l'histogramme tend vers la courbe représentative de $f$, les sommes d'aires de certains rectangles tendent vers une aire délimitée par la courbe de $f$. A partir d'une remarque faite plus haut, cela revient à dire que $P(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ tend vers l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de $f$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$. Puisque $f$ est positive, on sait que cette aire est $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

On peut maintenant énoncer le théorème de Moivre-Laplace :

**Théorème 1** (théorème de Moivre-Laplace).
Soit $X_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ où $n$ est un entier naturel non nul et $p$ est un réel de $]0, 1[$.

Soient $\mu_n = E(X_n)$ et $\sigma_n = \sigma(X_n)$. Soit $Z_n = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}$ la variable centrée réduite associée à $X_n$.

Alors, pour tous réels $a$ et $b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

ou aussi

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

**Commentaire 1.** C'est vrai, la formule est horrible. Mais si vous ne comprenez pas la signification du théorème de Moivre-Laplace, ce n'est vraiment pas grave. Vous serez tout de même capables le moment venu de faire les différents exercices sur la loi normale et en particulier ceux du bac.

**Commentaire 2.** On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Cependant, on peut démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ n'admet pas de primitive s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles. Dit autrement, ne cherchez pas à dériver une fonction que vous connaissez déjà car vous n'en trouverez aucune dont la dérivée soit $f$. Par exemple, la dérivée de la fonction $f$ elle-même est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-x) \times e^{-\frac{x^2}{2}}$ et n'est pas la fonction $f$.

Dans la pratique, les valeurs des intégales du type $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ seront fournies par la calculatrice ou par un tableur ou même par une table de valeurs. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

**Commentaire 3.** Si on recommence un grand nombre de fois de manière indépendante une même expérience à deux éventualités, on est en présence d'un schéma de Bernoulli avec $n$ grand. C'est par exemple le cas si on lance 10000 fois un dé équilibré et que l'on s'intéresse au nombre de fois où sort le n° 1.

Si on note $X_n$ la variable aléatoire ainsi définie, la formule de Moivre-Laplace dit qu'une probabilité du type $P(a_n \leqslant X_n \leqslant b_n)$ où $a_n = np + a\sqrt{np(1-p)}$ et $b_n = np + b\sqrt{np(1-p)}$ vaut environ $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ où $a = \frac{a_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ et $b = \frac{a_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Par exemple, la probabilité d'obtenir entre 1500 et 1700 fois un 1 en lançant 10000 fois un dé équilibré est $P(1500 \leqslant X_{10000} \leqslant 1700)$.

Ici, $n = 10000$, $p = \dfrac{1}{6}$, $a_n = 1500$, $b_n = 1700$ puis

$$a = \frac{1500 - \dfrac{10000}{6}}{\sqrt{10000 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}}} = -4,47\ldots \text{ et } b = \frac{1700 - \dfrac{10000}{6}}{\sqrt{10000 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}}} = 0,89\ldots$$

La probabilité d'obtenir entre 1500 et 1700 fois un 1 en lançant 10000 fois un dé équilibré est donc environ

$$\int_{-4,47\ldots}^{0,89\ldots} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

La calculatrice par exemple donne la valeur de cette intégrale (nous verrons plus loin comment). Elle est égale à $0,81$ à $10^{-2}$ près et est aussi, on le rappelle, une bonne approximation de la probabilité d'obtenir entre 1500 et 1700 fois un 1 en lançant 10000 fois un dé équilibré.

# II. La loi normale

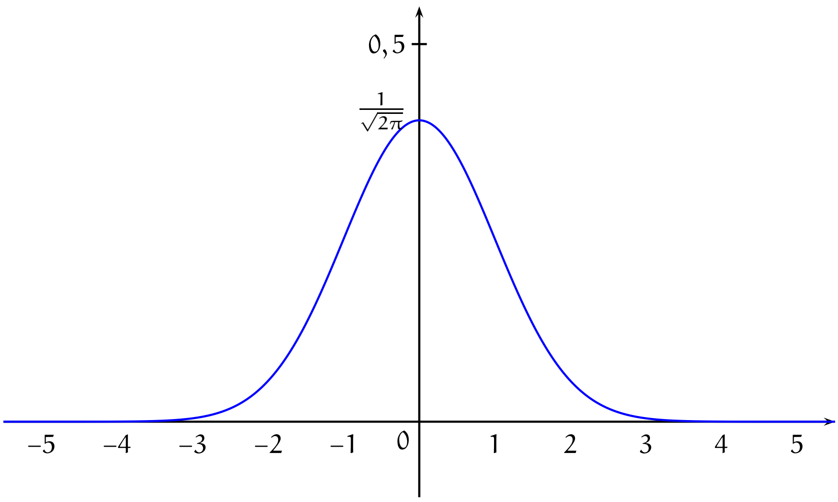
## 1) La loi normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0,1)$

### a) Définition de la loi normale centrée réduite

**Définition 1.** La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi continue de densité la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Voici le graphe de la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Cette courbe s'appelle parfois « la courbe en cloche » ou aussi « la courbe de Gauss ». On note que pour tout réel $x$, $f(-x) = f(x)$ et donc la fonction $f$ est paire ou encore l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.



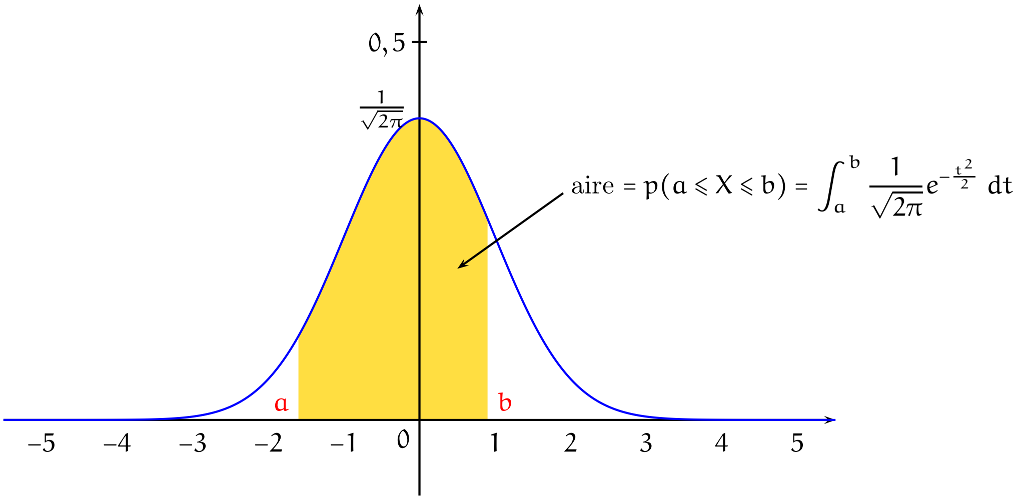

### b) Calculs de probabilités avec la loi normale centrée réduite

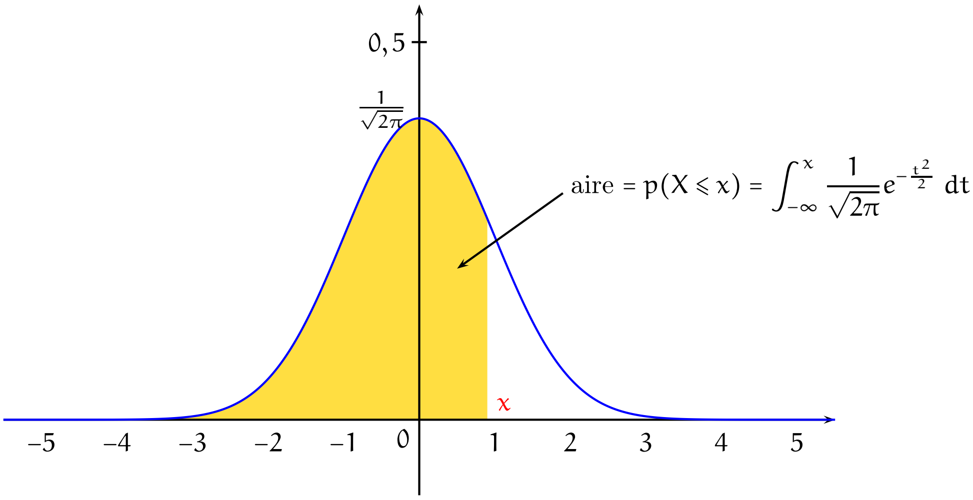
Par définition d'une densité, on a immédiatement

**Théorème 2.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

**1)** Pour tous réels $a$ et $b$, $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

**2)** Pour tout réel $x$, $p(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.




**Remarque 1.** La fonction $F : x \mapsto p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. ❏

**Remarque 2.** L'aire totale est égale à 1 ou encore $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$. ❏

Comme on l'a déjà signalé, la valeur des différentes intégrales ne peut s'obtenir qu'à partir de la calculatrice ou avec un tableur. Nous donnons ici les procédures pour TI 83 plus, Casio Graph 35+ et Excel.

## Avec la TI 83 plus.

**Pour calculer $p(a \leqslant X \leqslant b)$ :**

- On choisit le menu des distributions de probabilités : $\boxed{2^{\text{nd}}}+\boxed{\text{DISTR}}$
- On sélectionne le choix 2 : $\boxed{\text{2 :normalcdf}}$ (normal cumulative density function) ou noramlFRep (fonction de répartition de la loi normale) suivant le cas.
- On tombe sur normalcdf(

On doit donner la valeur de quatre paramètres suivant le schéma :

normalcdf(a,b,[moyenne,écart-type]).

Les deux derniers paramètres sont optionnels. Ce sont la moyenne et l'écart-type de la loi normale. Leurs valeurs par défaut sont respectivement 0 et 1.

Par exemple, normalcdf(-0.5,1.7,0,1)+$\boxed{\text{ENTER}}$ ou plus simplement normalcdf(-0.5,1.7)+$\boxed{\text{ENTER}}$ affiche .6468970361. Donc si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, on a

$$p(-0,5 \leqslant X \leqslant 1,7) = 0,6468970361\ldots$$

**Pour calculer $p(X \leqslant a)$ :**

Le principe est le même car $p(X \leqslant a) = p(-\infty < X \leqslant a)$. Pour la calculatrice $-\infty$ est $-10^{99}$ et donc $p(X \leqslant a)$ est obtenu en tapant

normalcdf($-10^{99}$,a,[moyenne,écart-type]).

Par exemple, normalcdf($-10^{99}$,1.7,0,1)+ ENTER ou plus simplement normalcdf($-10^{99}$,1.7)+ ENTER affiche .9554345683. Donc si $X$ est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, on a

$$p(X \leqslant 1,7) = 0,9554345683\ldots$$

**Pour calculer $p(X > b)$ :**

On tape

normalcdf($b, 10^{99}$,[moyenne,écart-type]).

**Pour calculer $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$ :**

On se donne une probabilité $p \in [0,1]$ et on cherche $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$.

• On choisit le menu des distributions de probabilités : 2nd + DISTR

• On sélectionne le choix 3 avec les flèches de défilement : 3 :invNorm (inverse normal cumulative density function).

• On tombe sur invNorm(
On doit donner la valeur de trois paramètres suivant le schéma :

invNorm(p,[moyenne,écart-type]).

Les deux derniers paramètres sont optionnels. Leurs valeurs par défaut sont respectivement $0$ et $1$.

Par exemple, invNorm(0.85,0,1)+ ENTER ou plus simplement normalcdf(0.85)+ ENTER affiche 1.03643338. Donc si $X$ est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, le réel $a$ tel que $p(X \leqslant a) = 0,85$ est $a = 1,03643338\ldots$

$$p(X \leqslant 1,03643338\ldots) = 0,85.$$

## Avec la Casio Graph 35+.

**Pour calculer $p(a \leqslant X \leqslant b)$ :**

• On choisit le menu STAT puis DIST (F5) puis NORM (F1).
• On choisit ensuite Ncd (normal cumulative density)
• On complète les paramètres :

| | |
|---|---|
| Normal C.D | |
| Lower | : a |
| Upper | : b |
| $\sigma$ | : écart-type |
| $\mu$ | : moyenne |

Par défaut $\sigma = 1$ et $\mu = 0$.

**Pour calculer $p(X \leqslant a)$ :**

On pratique comme précédemment avec $a = -10^{99}$.

**Pour calculer $p(X > b)$ :**

On pratique comme précédemment avec $b = 10^{99}$.

**Pour calculer $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$ :**

• On choisit le menu STAT puis DIST (F5) puis NORM (F1).
• On choisit InvN puis on complète

| | |
|---|---|
| Inverse Normal | |
| Tail : Left | |
| Area | : p |
| $\sigma$ | : écart-type |
| $\mu$ | : moyenne |

L'aire Area est la probabilité $p$. Si on choisit Tail : Left, la calculatrice répond le réel $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$ et si on choisit Tail : Right, la calculatrice répond le réel $a$ tel que $p(X \geqslant a) = p$.

## Avec Excel.

**Pour calculer $p(X \leqslant a)$ :**

Dans une cellule on tape

=LOI.NORMALE(

On a quatre paramètres à remplir suivant le schéma :

=LOI.NORMALE(a ;moyenne ;écart-type ;cumulative)

Le premier est $a$, le deuxième est la moyenne $\mu$ et le troisième l'écart-type $\sigma$ c'est-à-dire respectivement $0$ et $1$ pour la loi normale centrée réduite. Le quatrième prend la valeur VRAI ou FAUX suivant que l'on veuille cumuler ou pas ou encore suivant que l'on veuille $p(X \leqslant a)$ ou $f(a)$ où $f$ est la fonction densité de la loi normale.

Par exemple, si $X$ suit une loi centrée réduite, pour obtenir $p(X \leqslant 1,7)$, on tape

=LOI.NORMALE(1,7 ;0 ;1 ;VRAI)

**Pour calculer $p(a \leqslant X \leqslant b)$ :**

On utilise $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(X \leqslant b) - p(X \leqslant a)$.
Par exemple, pour obtenir $p(-0,5 \leqslant X \leqslant 1,7)$, on tape

=LOI.NORMALE(1,7 ;0 ;1 ;VRAI)-LOI.NORMALE(-0,5 ;0 ;1 ;VRAI)

**Pour calculer $p(X > a)$ :**

On utilise $p(X > a) = 1 - p(X \leqslant a)$.
Par exemple, pour obtenir $p(X > 1,7)$, on tape

=1-LOI.NORMALE(1,7 ;0 ;1 ;VRAI)

**Pour calculer $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$ :**

Dans une cellule on tape

=LOI.NORMALE.INVERSE(

On a trois paramètres à remplir suivant le schéma :

=LOI.NORMALE.INVERSE(p ;moyenne ;écart-type)

Par exemple, si $X$ est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, le réel $a$ tel que $p(X \leqslant a) = 0,85$ est obtenu par

=LOI.NORMALE.INVERSE(0,85 ;0 ;1)

### c) Espérance, variance et écart-type de la loi normale centrée réduite

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On rappelle que son espérance est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)\,dt + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)\,dt,$$

où $f$ est la fonction densité de la loi normale centrée réduite. On rappelle aussi que la variance de $X$ et l'écart-type de $X$ sont respectivement

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Ce n'est pas pour rien que la loi normale centrée réduite s'appelle ainsi car :

**Théorème 3.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
L'espérance de $X$ est $E(X) = 0$, la variance de $X$ est $V(X) = 1$ et l'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = 1$.

**Démonstration.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Pour tout réel $t$, posons $u(t) = -\dfrac{t^2}{2}$. $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $t$, $u'(t) = -t$ puis

$$tf(t) = t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) e^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u'(t) e^{u(t)}.$$

On sait alors qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto tf(t)$ est la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{u(t)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit $x$ un réel négatif.

$$\int_x^0 tf(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Maintenant, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 tf(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

De même, pour tout réel positif $y$,

$$\int_0^y tf(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^y = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

puis

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y tf(t)\,dt = \lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Finalement,

$$E(X) = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 tf(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y tf(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

On admet que la variance et l'écart-type de $X$ sont égaux à $1$.

---

### d) Définition du fractile $u_\alpha$

**Théorème 4.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Pour tout réel $\alpha$ de $]0,1]$, il existe un réel positif $u_\alpha$ et un seul tel que

$$p\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha.$$

**Démonstration.** On note toujours $f$ la densité de la loi normale centrée réduite.

Soit $\alpha$ un réel de $]0,1]$. Puisque $f$ est une fonction paire ou encore puisque son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, pour tout réel positif $x$,

$$p(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt = 2p(0 \leqslant X \leqslant x).$$

Par suite,

$$p(-x \leqslant X \leqslant x) = 1-\alpha \Leftrightarrow 2p(0 \leqslant X \leqslant x) = 1-\alpha \Leftrightarrow p(0 \leqslant X \leqslant x) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

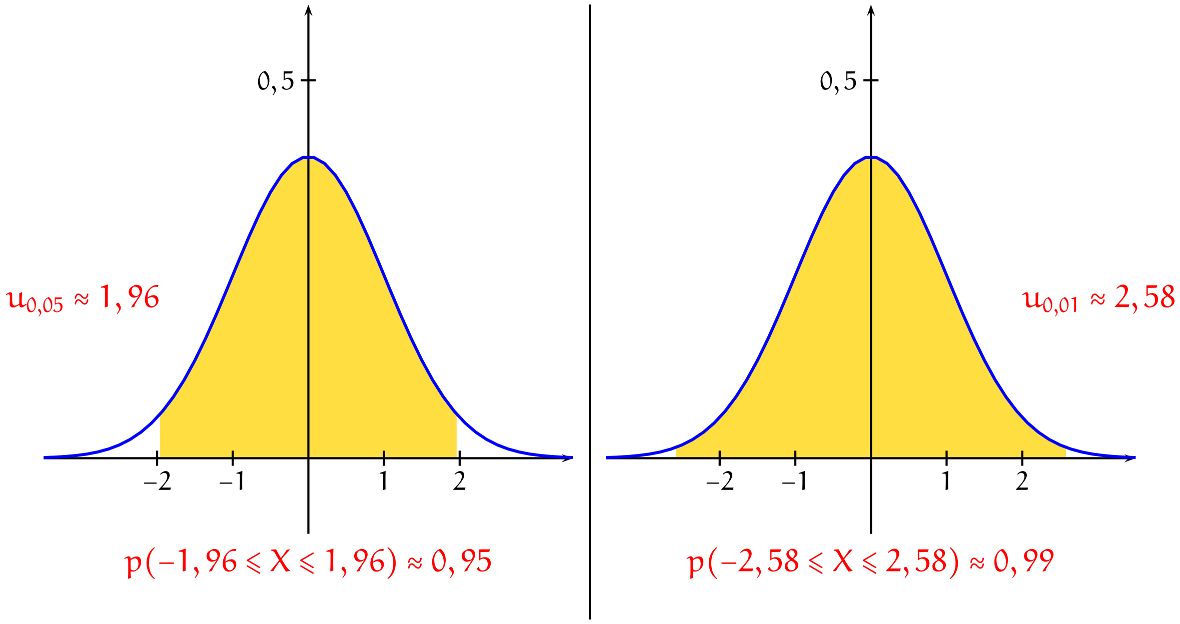
Pour tout réel positif $x$, posons $G(x) = p(0 \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ de sorte que $p(-x \leqslant X \leqslant x) = 1-\alpha \Leftrightarrow G(x) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

• La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On sait alors que la fonction $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G' = f$ ($G$ est une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$). La fonction $f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et donc la fonction $G$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• La fonction $G$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
D'autre part, $G(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \dfrac{1}{2}$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est la moitié de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe de $f$, aire qui est égale à $1$.
D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $k$ de $\left[G(0), \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)\right[ = \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, il existe un réel positif $x_0$ et un seul tel que $G(x_0) = k$.
Enfin $0 < \alpha \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -\alpha < 0 \Rightarrow 0 \leqslant 1-\alpha < 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{1-\alpha}{2} < \dfrac{1}{2}$.
Comme $\dfrac{1-\alpha}{2}$ est dans $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, il existe un réel positif $u_\alpha$ et un seul tel que $G\left(u_\alpha\right) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ ou encore tel que $p\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

---

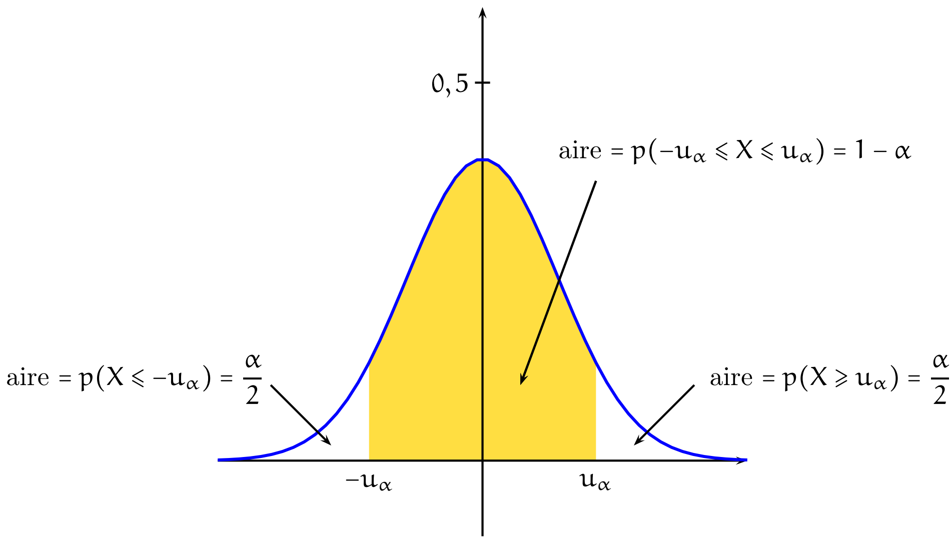
On doit connaître explicitement $u_\alpha$ dans deux situations précises, quand $\alpha = 0,05$ de sorte $1-\alpha = 0,95$ et quand $\alpha = 0,01$ de sorte que $1-\alpha = 0,99$.




Pour toute autre valeur de $\alpha$, le réel $u_\alpha$ est obtenu à la calculatrice à partir de la fonction inverse de la loi normale qui, on le rappelle, répond à la question : quel est le réel $a$ tel que $p(X \leqslant a) = p$ où $p$ est un réel donné dans $[0, 1[$ ?

On doit pour cela avoir conscience que, pour des raisons de symétrie, l'égalité $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ fournit aussi $p(X \leqslant -u_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X \geqslant u_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$. Donc

$$p(X \leqslant u_\alpha) = 1 - p(X \geqslant u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$




On peut énoncer

**Théorème 5.** Pour tout réel $\alpha$ de $]0, 1]$, $u_\alpha$ est le réel tel que

$$p(X \leqslant u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Par exemple, déterminons grâce à la calculatrice le réel $u_{0,25}$. Par définition de $u_{0,25}$,

$$p(-u_{0,25} \leqslant X \leqslant u_{0,25}) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Pour des raisons de symétrie, $p(X \geqslant u_{0,25}) = \dfrac{0,25}{2} = 0,125$ et $p(X \leqslant -u_{0,25}) = \dfrac{0,25}{2} = 0,125$ puis

$$p(X \leqslant u_{0,25}) = 1 - 0,125 = 0,875$$

ou aussi

$$p(X \leqslant u_{0,25}) = p(X \leqslant -u_{0,25}) + p(-u_{0,25} \leqslant X \leqslant u_{0,25}) = 0,75 + 0,125 = 0,875.$$

Grâce à la « fonction inverse » de la fonction de répartition de la loi normale, la calculatrice fournit

$$u_{0,25} = 1,15\ldots$$

### e) Approximation d'une loi binomiale par la loi normale centrée réduite

Revenons maintenant sur le théorème de MOIVRE-LAPLACE.
Soient $X_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$ puis $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à $X_n$. Soient $a$ et $b$ deux réels. On rappelle tout d'abord que

$$\begin{aligned} a \leqslant Z_n \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b \Leftrightarrow a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant b\sqrt{np(1-p)} \\ \Leftrightarrow np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}, \end{aligned}$$

puis que

$$P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}\right).$$

Le théorème de MOIVRE-LAPLACE affirme alors que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = P(a \leqslant Z \leqslant b),$$

où $Z$ suit une loi normale centrée réduite.

Si on applique ce résultat au cas particulier où $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$ pour un $\alpha$ donné dans $]0,1[$, puisque par définition de $u_\alpha$,

$$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha,$$

on obtient

**Théorème 6.** Pour tout réel $\alpha$ de $]0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right) = 1 - \alpha.$$

Ainsi, $P\left(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha\right)$ peut être approché d'aussi près qu'on veut par $\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1 - \alpha$ pourvu que l'on choisisse $n$ suffisament grand c'est-à-dire pourvu que l'on choisisse $n$ supérieur à un certain entier $n_0$. On doit avoir conscience que **l'entier $n_0$ dépend de la probabilité** $p$. Par exemple, quand $p$ est proche des bords de l'intervalle $]0,1[$, la convergence vers $1 - \alpha$ est beaucoup plus lente et il faut choisir $n_0$ beaucoup plus grand que si $p$ est proche de $\frac{1}{2}$.

Dans la pratique, il est communément reconnu que l'on peut effectuer l'approximation

$P\left(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha\right)$ est à peu près égal à $1 - \alpha$
quand
$n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

## 2) La loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$ : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

### a) Définition de la loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$

**Définition 2.** Soit $X$ une variable aléatoire. Soient $\mu$ un réel et $\sigma$ un réel strictement positif.
$X$ suit une **loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$** si et seulement si la loi $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

On peut démontrer que

**Théorème 7.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$.
L'espérance de $X$ est $E(X) = \mu$, la variance de $X$ est $V(X) = \sigma^2$ et l'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sigma$.

**Notation.** La loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$ se note traditionnellement $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

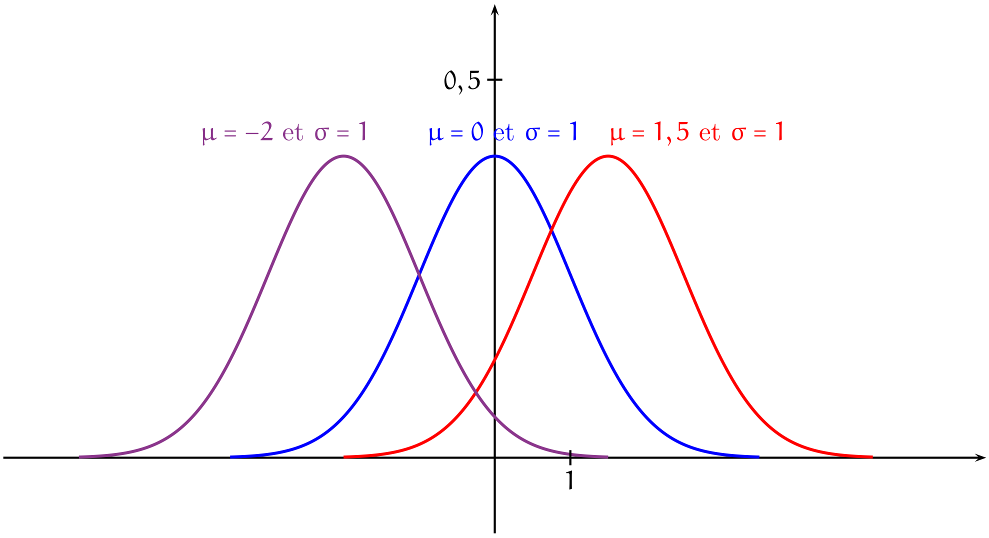
On peut être surpris de trouver dans la parenthèse le carré de l'écart-type $\sigma$ c'est-à-dire la variance $\sigma^2$. Ce choix vient du fait qu'on peut démontrer que la variance d'une loi normale a des propriétés de calculs plus agréables que les propriétés de l'écart-type. Les mathématiciens préfèrent donc décrire une loi normale par les paramètres $\mu$ et $\sigma^2$.

Ainsi, $\mathcal{N}(-3; 0,25)$ désigne la loi normale d'espérance $-3$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$ car $\sigma^2 = 0,25$. Néanmoins, attention !

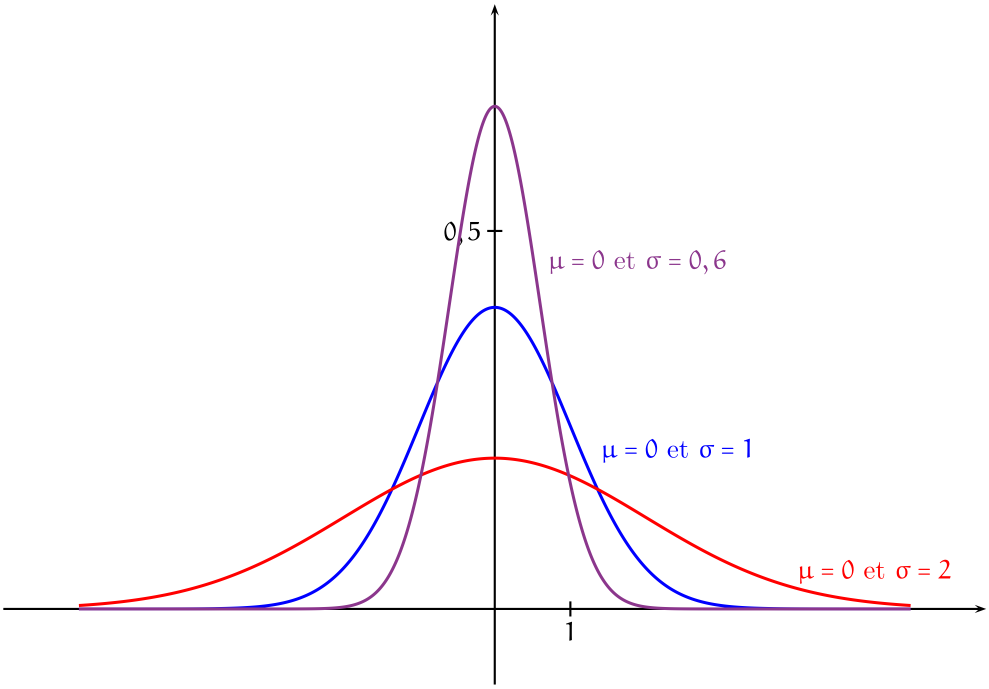
Quand vous utiliserez la calculatrice, les paramètres que vous indiquerez seront la moyenne $\mu$ et l'écart-type $\sigma$ et pas la moyenne $\mu$ et la variance $\sigma^2$.

**Commentaire 1.** On peut démontrer que la loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$ est la loi de densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mais on n'a pas à le savoir en terminale S. Quand on travaille avec une loi normale quelconque, on revient toujours à sa définition à partir de la loi normale centrée réduite associée $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

**Commentaire 2.** La moyenne $\mu$ est un **paramètre de position**. Pour la loi normale, il indique l'abscisse du sommet de la courbe en cloche. Quand on fait grandir $\mu$, on déplace le sommet vers la droite sans modifier la forme de la courbe.



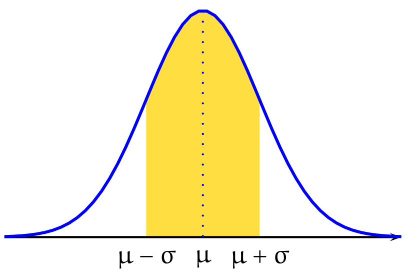

L'écart-type $\sigma$ est un **paramètre de dispersion**. Quand on fait grandir $\sigma$, on augmente la dispersion des valeurs et donc on élargit et on applatit la cloche et quand on diminue $\sigma$, on ressere les valeurs autour de $\mu$.



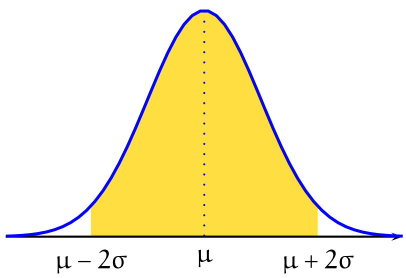

### b) Un, deux ou trois écarts-types

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$. On doit connaître une bonne fois pour toutes les probabilités que $X$ appartienne respectivement à $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$, $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ et $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$.
On note que ces probabilités peuvent aussi être obtenues grâce à la calculatrice.
On note enfin que si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est la loi centrée réduite associée à $X$, on a $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) = p(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$ et $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) = p(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$ et $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) = p(-3 \leqslant Z \leqslant 3)$.

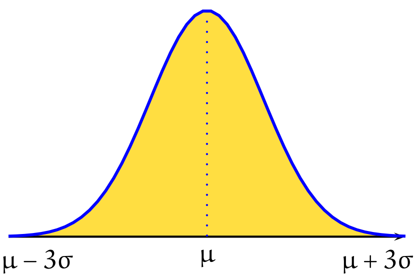
Les valeurs fournies ci-dessous sont des valeurs approchées.




$p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$




$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$




$p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,99$

Donc, on a environ 68% de chances de tomber entre la moyenne moins un écart-type et la moyenne plus un écart-type, environ 95% de chances de tomber entre la moyenne moins deux écarts-types et la moyenne plus deux écarts-types et environ 99% de chances de tomber entre la moyenne moins trois écarts-types et la moyenne plus trois écarts-types.

Pour finir ce chapitre, on donne maintenant trois exercices. Le premier se place à un niveau théorique et analyse à peu près toutes les situations de calcul. Les deux autres reposent approximativement les mêmes questions dans un cadre concret.

**Exercice 1.** Dans cette exercice, $X$ est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$.

**1)** Dans cette question $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. Donc, $X$ suit la loi $\mathscr{N}(2000, 22500)$.
- **a)** Calculer $p(1850 \leqslant X \leqslant 2150)$.
- **b)** Calculer $p(1300 \leqslant X \leqslant 1950)$.
- **c)** Calculer $p(X \leqslant 2100)$.
- **d)** Calculer $p(X \geqslant 2200)$.
- **e)** Calculer $a$ tel que $p(X \leqslant a) = 0,85$.
- **f)** Calculer $a$ tel que $p(2000 - a \leqslant X \leqslant 2000 + a) = 0,85$.

**2)** Dans cette question $\sigma = 55$. On sait d'autre part que $p(X \leqslant 675) = 0,92$. Calculer $\mu$.

**3)** Dans cette question $\mu = 4,7$. On sait d'autre part que $p(X \leqslant 7,5) = 0,97$. Calculer $\sigma$.

**4)** Dans cette question $\mu = 900$. On sait d'autre part que $p(880 \leqslant X \leqslant 920) = 0,97$. Calculer $\sigma$.

**Solution.**

**1) a)** La probabilité demandée est $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$. D'après le cours, cette probabilité est directement $0,68$ à $10^{-2}$ près.

**b)** On utilise la fonction de répartition de la loi normale prédéfinie dans la calculatrice (normalcdf ou normalFRep pour TI et Ncd pour CASIO). On remplit $a = 1300$, $b = 1950$, $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. On obtient

$$p(1300 \leqslant X \leqslant 1950) = 0,37$$

arrondie au centième.

**c)** On utilise la fonction de répartition de la loi normale prédéfinie dans la calculatrice. On remplit $a = -10^{99}$, $b = 2100$, $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. On obtient

$$p(X \leqslant 2100) = 0,75$$

arrondie au centième.

**d)** On utilise la fonction de répartition de la loi normale prédéfinie dans la calculatrice. On remplit $a = 2200$, $b = 10^{99}$, $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. On obtient

$$p(X \geqslant 2200) = 0,09$$

arrondie au centième.

**e)** On utilise la fonction invNorm sur TI et InvN sur Casio. On remplit $p = 0,85$, $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. On obtient $a = 2155,4$ arrondi au dixième ou encore

$$p(X \leqslant 2155,4\ldots) = 0,85.$$

**f)** On transforme d'abord le problème pour se ramener à la situation précédente.
$p(2000 - a \leqslant X \leqslant 2000 + a) = 0,85$ fournit $p(X \leqslant 2000 - a \text{ ou } X \geqslant 2000 + a) = 1 - 0,85 = 0,15$ puis, pour des raisons de symétrie, $p(X \leqslant 2000 - a) = p(X \geqslant 2000 + a) = \dfrac{1 - 0,85}{2} = 0,075$. Enfin,

$$p(X \leqslant 2000 + a) = p(X \leqslant 2000 - a) + p(2000 - a \leqslant X \leqslant 2000 + a) = 0,075 + 0,85 = 0,925.$$

On utilise ensuite la fonction invNorm sur TI et InvN sur Casio. On remplit $p = 0,925$, $\mu = 2000$ et $\sigma = 150$. On obtient $2000 + a = 2215,9\ldots$ et donc

$$a = 215,9\ldots$$

**2)** Puisqu'on ne connait pas l'un des deux paramètres $\mu$ ou $\sigma$, on se ramène à la loi normale centrée réduite.
Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{55}$ la variable centrée réduite associée à X.

$$X \leqslant 675 \Leftrightarrow X - \mu \leqslant 675 - \mu \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{55} \leqslant \frac{675-\mu}{55} \Leftrightarrow Z \leqslant \frac{675-\mu}{55}.$$

L'énoncé donne $p\left(Z \leqslant \dfrac{675-\mu}{55}\right) = 0,92$. La calculatrice fournit $\dfrac{675-\mu}{55} = 1,405\ldots$ grâce à la « fonction inverse » de la loi normale avec $p = 0,95$, moyenne $= 0$ et écart-type $= 1$. On en déduit que

$$\mu = 675 - 55 \times 1,405\ldots = 597,7\ldots$$

**3)** On se ramène à la loi normale centrée réduite.
Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-4,7}{\sigma}$ la variable centrée réduite associée à X.

$$X \leqslant 7,5 \Leftrightarrow X - 4,7 \leqslant 7,5 - 4,7 \Leftrightarrow \frac{X-4,7}{\sigma} \leqslant \frac{2,8}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant \frac{2,8}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $p\left(Z \leqslant \dfrac{2,8}{\sigma}\right) = 0,97$. La calculatrice fournit $\dfrac{2,8}{\sigma} = 1,88\ldots$ grâce à la « fonction inverse » de la loi normale avec $p = 0,97$, moyenne $= 0$ et écart-type $= 1$. On en déduit que

$$\sigma = \frac{2,8}{1,88\ldots} = 1,48\ldots$$

**4)** On se ramène à la loi normale centrée réduite.
Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-900}{\sigma}$ la variable centrée réduite associée à X.

$$880 \leqslant X \leqslant 920 \Leftrightarrow -20 \leqslant X - 900 \leqslant 20 \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} \leqslant \frac{X-900}{\sigma} \leqslant \frac{20}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{20}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $p\left(-\dfrac{20}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,97$.
Pour des raions de symétrie, $p\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = p\left(Z \geqslant \dfrac{20}{\sigma}\right) = \dfrac{1-0,97}{2} = 0,015$ puis

$$p\left(Z \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) = p\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right) + p\left(-\frac{20}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{20}{\sigma}\right) = 0,97 + 0,015 = 0,985.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{20}{\sigma} = 2,170\ldots$ grâce à la « fonction inverse » de
la loi normale avec $p = 0,985$, moyenne $= 0$ et écart-type $= 1$. On en déduit que

$$\sigma = \frac{20}{2,170\ldots} = 9,2\ldots$$

---

**Exercice 2. Réglage d'une machine d'embouteillage.**
**1)** Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cl) de liquide fourni par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cl peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La législation impose qu'il y ait moins de $0,1\%$ de bouteilles contenant moins d'un litre.
A quelle valeur de la moyenne $\mu$ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?

**2)** La contenance des bouteilles étant de 110 cl, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage.

**3)** Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
**a)** Quelles sont les valeurs possibles de $\mu$ ?
**b)** Le directeur choisit de prendre $\mu = 105,3$. Quelle est alors la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?

**Solution.** On note Z la variable centrée réduite associée à X c'est-à-dire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

**1)** L'énoncé donne $p(X \leqslant 100) \leqslant 0,001$. Or

$$X \leqslant 100 \Leftrightarrow X - \mu \leqslant 100 - \mu \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{100-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant \frac{100-\mu}{2}$$

et donc $p(X \leqslant 100) \leqslant 0,001 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant \frac{100-\mu}{2}\right) \leqslant 0,001$. Déterminons d'abord le réel $\mu_0$ tel que

$$p\left(Z \leqslant \frac{100-\mu_0}{2}\right) = 0,001.$$

La calculatrice fournit $\frac{100-\mu_0}{2} = -3,090\ldots$ et donc $\mu_0 = 106,1\ldots$.

Ensuite, on rappelle que la fonction de répartition $x \mapsto p(Z \leqslant x)$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\begin{aligned} p\left(Z \leqslant \frac{100-\mu}{2}\right) \leqslant 0,001 &\Leftrightarrow p\left(Z \leqslant \frac{100-\mu}{2}\right) \leqslant p\left(Z \leqslant \frac{100-\mu_0}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{100-\mu}{2} \leqslant \frac{100-\mu_0}{2} \\ &\Leftrightarrow 100-\mu \leqslant 100-\mu_0 \Leftrightarrow -\mu \leqslant -\mu_0 \Leftrightarrow \mu \geqslant \mu_0. \end{aligned}$$

En réglant la machine sur une moyenne $\mu = 106,1$ cl ou davantage, la législation sera respectée.

**2)** On choisit $\mu = \mu_0 = 106,1$ (et $\sigma = 2$). La probabilité demandée est $p(X \geqslant 110)$.
La calculatrice fournit $p(Z \geqslant 110) = 0,025\ldots$
En prenant $\mu = 106,1$, on a environ $2,5\%$ de chances qu'une bouteille déborde au remplissage.

**3) a)** $\mu$ est de nouveau quelconque.
La condition s'écrit $p(X \geqslant 110) \leqslant 0,01$ ou encore $p(X \leqslant 110) \geqslant 0,99$ ou enfin

$$p\left(Z \leqslant \frac{110-\mu}{2}\right) \geqslant 0,99.$$

La machine fournit le réel $a$ tel que $p(Z \leqslant a) = 0,99$ : $a = 2,32\ldots$ puis, comme à la question 1),

$$\begin{aligned} p\left(Z \leqslant \frac{110-\mu}{2}\right) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant \frac{110-\mu}{2}\right) \geqslant p\left(Z \leqslant a\right) &\Leftrightarrow \frac{110-\mu}{2} \geqslant a \\ &\Leftrightarrow 110-\mu \geqslant 2a \Leftrightarrow 110-2a \geqslant \mu \\ &\Leftrightarrow \mu \leqslant 105,3\ldots. \end{aligned}$$

**b)** La probabilité demandée est $p(X \leqslant 100)$. La calculatrice fournit

$$p(X \leqslant 100) = 0,003\ldots$$

En particulier, la législation n'est pas respectée.

---

**Exercice 3. Durée de vie d'un appareil.**
La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus.
Les spécifications impliquent que $80\%$ de la production des appareils ait une durée de vie entre $120$ et $200$ jours et que $5\%$ de la production ait une durée de vie inférieure à $120$ jours.

**1)** Quelles sont les valeurs de $\mu$ et $\sigma^2$.

**2)** Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie est comprise entre $200$ et $230$ jours ?

**Solution.** Soit $X$ la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un appareil. $X$ suit une loi normale de paramètres $\sigma$ et $\mu$. On note $Z$ la variable aléatoire centrée réduite associée à $X$ à savoir $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

L'énoncé donne $p(120 \leqslant X \leqslant 200) = 0,8$ et $p(X \leqslant 120) = 0,05$.
En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$p(X \leqslant 200) = p(120 \leqslant X \leqslant 200) + p(X \leqslant 120) = 0,8 + 0,05 = 0,85.$$

En passant à la loi centrée réduite, on obtient

$$p\left(Z \leqslant \frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0,85 \text{ et } p\left(Z \leqslant \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05.$$

La calculatrice fournit alors $\dfrac{200-\mu}{\sigma} = 1,036\ldots$ et $\dfrac{120-\mu}{\sigma} = -1,644\ldots$ On arrondit au centième et on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{200-\mu}{\sigma} = 1,04\\ \dfrac{120-\mu}{\sigma} = -1,64\end{array}\right..$$

Résolvons-le.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{200-\mu}{\sigma} = 1,04\\ \dfrac{120-\mu}{\sigma} = -1,64\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}200-\mu = 1,04\sigma\\ 120-\mu = -1,64\sigma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu = 200-1,04\sigma\\ 120-(200-1,04\sigma) = -1,64\sigma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-80 = -2,68\sigma\\ \mu = 200-1,04\sigma\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sigma = \dfrac{80}{2,68}\\ \mu = 200-1,04\dfrac{80}{2,68}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sigma = 29,85\ldots\\ \mu = 168,95\ldots\end{array}\right.$$

On arrondit au jour :

$$\boxed{\mu = 169 \text{ et } \sigma = 30.}$$

**2)** La probabilité demandée est $p(200 \leqslant X \leqslant 230)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(200 \leqslant X \leqslant 230) = 0,13 \text{ arrondi au centième.}}$$

---