

Planche n° 17. Equations différentielles linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**IT)

Résoudre sur l'intervalle I de \mathbb{R} proposé les équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $x \ln x y' + y = x$, $I =]1, +\infty[$ | 2) $xy' + 3y = \frac{1}{1+x^2}$, $I =]0, +\infty[$ |
| 3) $(1-x)^2 y' = (2-x)y$, $I =]-\infty, 1[$ | 4) $x(xy' + y - x) = 1$, $I =]-\infty, 0[$ |
| 5) $2xy' + y = x^4$, $I =]-\infty, 0[$ | 6) $y' + 2y = x^2 - 3x$, $I = \mathbb{R}$ |
| 7) $y' + y = \frac{1}{1+2e^x}$, $I = \mathbb{R}$ | 8) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$, $I =]0, \pi[$ |

Exercice n° 2 (**IT)

- Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + y \operatorname{th} x = 0$ prenant la valeur 1 en 0.
- Déterminer la solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + y \operatorname{th} x = x \operatorname{th} x$ prenant la valeur 0 en 0.

Exercice n° 3 (**I)

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-\infty, -1[$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice n° 4 (***)

Résoudre sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercice n° 5 (**)

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles :

- | | | |
|--|------------------------------|--|
| 1) $y'' - 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$ | 2) $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$ | 3) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$ |
| 4) $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x \sin x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. | | |

Exercice n° 6 (**IT) (d'après Mines d'Alès 2005)

On note (E_1) l'équation différentielle :

$$-x^2 z' + xz = z^2.$$

On cherche les solutions de (E_1) sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $I =]1, +\infty[$.

- On pose $y = \frac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur I d'une équation différentielle linéaire du premier ordre notée (E_2) .
- Résoudre (E_2) sur I puis déterminer les solutions de (E_1) sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $I =]1, +\infty[$.

Exercice n° 7 (**IT) (***)

On considère l'équation différentielle $(E) : ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0, +\infty[$.

- Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
- Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
- Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

Exercice n° 8 (***)

Soit a un réel non nul. Soit f continue sur \mathbb{R} et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur \mathbb{R} , de période T .

Exercice n° 9 (IT)** (quelques équations différentielles en physique)

Résoudre :

1) L'équation classique du premier ordre (activité radioactive, cinétique chimique du 1er ordre, freinage avec frottement fluide, circuits RL, ...)

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_{\infty}}{\tau} \text{ avec } x(0) = x_0$$

où x_{∞} et x_0 sont deux réels (ou $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\infty}}{\tau}$ avec $v(0) = v_0$).

2) Equation de la charge d'un condensateur

$$RC \frac{dU}{dt} + U = E \text{ avec } U(0) = U_0.$$

3) Oscillateur harmonique

a) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = A$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

4) Circuits RLC

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$ avec $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ ($\lambda = \frac{R}{2L}$ est le coefficient d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre).