Planche n° 17. Dénombrements. Probabilités. Corrigé

Exercice n° 1

Soit a un élément donné de E. Comptons le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \cap Y = \{a\}$. Cet ensemble de couples est en bijection avec l'ensemble des couples $(X', Y') \in (\mathscr{P}(E \setminus \{a\}))^2$ tels que $X' \cap Y' = \varnothing$.

Soit X' une partie donnée de $E \setminus \{a\}$ puis $k \in [\![0, n-1]\!]$ le cardinal de X'. Le nombre de couples $(X', Y') \in (\mathscr{P}(E \setminus \{a\})^2$ tels que $X' \cap Y' = \varnothing$ est encore le nombre de parties Y' de $E \setminus (X' \cup \{a\})$ à savoir 2^{n-1-k}. Puisqu'il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$ parties X' de $E \setminus \{a\}$ à k éléments, le nombre de couples $(X', Y') \in (\mathscr{P}(E \setminus \{a\})^2$ tels que $X' \cap Y' = \varnothing$ et $\text{card}(X') = k$ est $\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} 2^{n-1-k}$.
En faisant varier k de 0 à $n-1$, on obtient le nombre de couples de couples $(X', Y') \in (\mathscr{P}(E \setminus \{a\})^2$ tels que $X' \cap Y' = \varnothing$ ou encore le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \cap Y = \{a\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} 2^{n-1-k} = (1+2)^{n-1} = 3^{n-1}.$$

Maintenant, il y a n singletons dans E et donc le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \cap Y$ est un singleton est $n3^{n-1}$

Exercice n° 2

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, il part $n-3$ diagonales du sommet A_k et donc $n(n-3)$ diagonales partent des sommets $A_1, \ldots, A_n$. Dans ce décompte, chaque diagonale a été comptée deux fois (la diagonale $A_k A_l$ a été comptée une fois en tant que diagonale partant de A_k et une fois en tant que diagonale partant de A_l. Le nombre total de diagonales est donc $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice n° 3

Une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ dans E. Le nombre cherché est donc

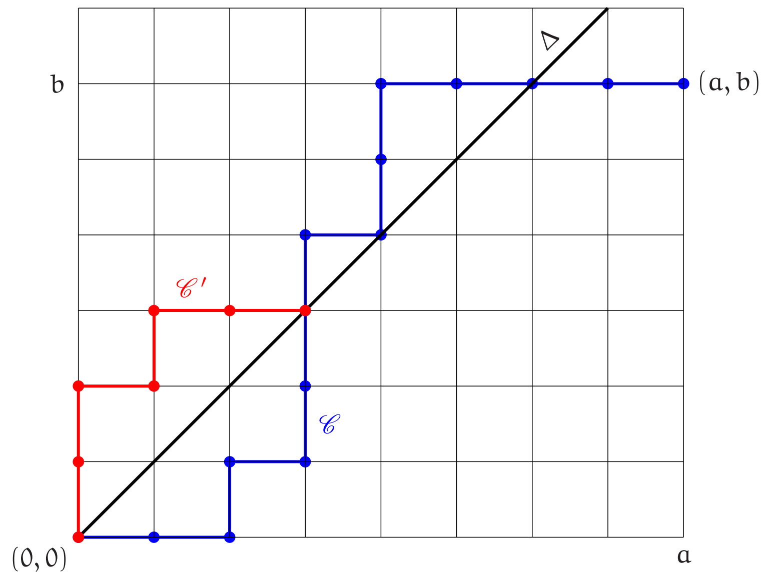
$$\text{card}\left(E^{E \times E}\right) = n^{(n^2)}.$$

Exercice n° 4

1) Un chemin de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + n)$ « est » un mot de $m + n$ lettres comportant m lettres D (pour droite) et n lettes H (pour haut) du type DHHDDDH...H. Le nombre de ces chemins est le nombre de choix des emplacements des m lettres D dans les $m + n$ positions. Il y en a $\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$.

2) a) Soit $\mathscr{C}$ un chemin allant de $(0, 1)$ à (a, b). Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des abscisses x des points (x, y) de $\mathscr{C}$ tels que $x \leqslant y$. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in \mathscr{E}$) et majorée (par a). Donc $\mathscr{E}$ admet un plus grand élément. Notons le c.
De même, on peut définir d la plus grande ordonnée d'un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse c. Par construction, $c \leqslant d$. c n'est pas a car $a > b \geqslant d$ et donc $c \leqslant a - 1$. Par définition de c et d, le point de $\mathscr{C}$ qui suit (c, d) est $(c + 1, d)$ avec $c + 1 > d$. Ainsi, $c \leqslant d$ et $c > d - 1$. On en déduit que $c = d$. Par construction le point (c, c) est un point de $\mathscr{C}$ et de Δ.

b) Notons E l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ et F l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$. On va construire une bijection de E sur F.



Soit $\mathscr{C}$ un élément de E. On note $\mathscr{C}_1$ la partie de $\mathscr{C}$ qui va de $(0,0)$ au premier point de $\mathscr{C}$ autre que $(0,0)$ qui se trouve sur Δ puis $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$. $\mathscr{C}$ ne rencontre pas Δ en (a,b) (car $a > b$) et donc $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un point distinct de $(0,0)$ strictement avant (a,b). Donc $(a,b) \in \mathscr{C}_2$ et en particulier, $\mathscr{C}_2 \neq \varnothing$. De même, $(0,0)$ et $(1,0)$ appartiennent à $\mathscr{C}_1$ et donc $\mathscr{C}_1 \neq \varnothing$.
Notons alors $\mathscr{C}_1'$ le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à Δ et enfin $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_1' \cup \mathscr{C}_2$. Puisque $(1,0) \in \mathscr{C}_1$, $(0,1) \in \mathscr{C}_1'$ et donc $\mathscr{C}' \in F$.

On considère $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après ce qui précède, f est une application de E vers F.
De même, on peut considérer $g : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & E \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après a), un chemin $\mathscr{C}$ de F a nécessairement un point commun avec Δ autre que $(0,0)$. On peut lui appliquer la transformation précédente et on obtient un chemin $\mathscr{C}'$ de E.
Pour tout chemin $\mathscr{C}$ de E, on a $g(f(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$ et pour tout chemin $\mathscr{C}'$ de F, on a $f(g(\mathscr{C}')) = \mathscr{C}'$. Donc $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
On sait alors que f est bijective. En particulier, $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.

c) Un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ passe par $(1,0)$. Le nombre total de chemins de $(0,0)$ à (a,b) passant par $(1,0)$ est encore le nombre total de chemins de $(1,0)$ à (a,b). Il y en a $\binom{a+b-1}{a-1}$ d'après la question 1). Le nombre de chemins de $(0,0)$ à (a,b) situés en dessous de Δ est la différence entre $\binom{a+b-1}{a-1}$ et le nombre de chemin passant par $(1,0)$ et rencontrant Δ en au moins un point distinct de $(0,0)$ à savoir $\text{card}(E)$. D'après la question b), $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et donc le nombre cherché est

$$\binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(E) = \binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(F) = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}.$$

3) En représentant chaque étape du dépouillement par un couple (x,y) où x est le nombre de voix de A et y est le nombre de voix de B, un dépouillement « est » un chemin de $(0,0)$ à (a,b) et un dépouillement où A est constamment en tête « est » est un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0,0)$. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}\right)\frac{a!b!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Exercice n° 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$. Chaque B_n est une réunion dénombrable d'événements et donc chaque B_n est un événement. De plus, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Mais, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right) \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p).$$

Puisque la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, $\sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$ existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p) = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$ puis que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)\right) = 0.$$

Ainsi, $\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)$ est un événement négligeable.

Exercice n° 6

1) Il suffit de s'assurer que la série de terme général $\mathbb{P}(\{n\})$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et a pour somme 1. Or,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E_n = n\mathbb{N}^* = \{qn,\ q \in \mathbb{N}^*$ puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \sum_{q=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{qn\}) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{qn}} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^q = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}\\ &= \frac{1}{2^n-1}.\end{aligned}$$

b) Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $E_a \cap E_b$ est l'événement « l'entier tiré est un multiple de a et de b » ou encore « l'entier tiré est un multiple de $a \vee b$ ». Donc, $E_a \cap E_b = E_m$ où $m = a \vee b$ puis $\mathbb{P}(E_a \cap E_b) = \frac{1}{2^m-1}$. Par suite,

$$\begin{aligned}E_a \text{ et } E_b \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow \mathbb{P}(E_a \cap E_b) = \mathbb{P}(E_a) \times \mathbb{P}(E_b) \Leftrightarrow \frac{1}{2^m-1} = \frac{1}{(2^a-1)(2^b-1)}\\ &\Leftrightarrow 2^m - 1 = (2^a-1)\left(2^b-1\right) \Leftrightarrow 2^m = 2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2.\end{aligned}$$

1er cas. Si $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, alors $m \geqslant 2$ et $a+b \geqslant 2$. On en déduit que $2^m \equiv 0$ [4] et $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2 \equiv 0 - 0 - 0 + 2$ [4] ou encore $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2 \equiv 2$ [4]. En particulier, $2^m \not\equiv 2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2$ [4] et donc $2^m \neq 2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2$. Dans ce cas, E_a et E_b ne sont pas indépendants.

2ème cas. Si $a = 1$, alors $m = b$ puis $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 2 = 2^{1+b} - 2 - 2^b + 2 = 2^b(2-1) = 2^b = 2^m$. Dans ce cas, E_a est E_b sont indépendants. De même, si $b = 1$, E_a et E_b sont indépendants.

Finalement E_a et E_b sont indépendants si et seulement si $a = 1$ ou $b = 1$.

Exercice n° 7

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\\ &= 0 \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n = \frac{b_n}{2}.\end{aligned}$$

De même, $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ et $c_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} + c_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MX_n,$$

où $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Ensuite, en développant suivant la dernière colonne,

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & X & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) = (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right).$$

χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$E_1(M)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{\frac{1}{2}}(M)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $E_{-\frac{1}{2}}(M)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par suite, $M = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis

$$X_n = M^n X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1 + (-1)^n}{2^{n+1}},\ \mathbb{P}(B_n) = \frac{1 - (-1)^n}{2^{n+1}} \text{ et } \mathbb{P}(C_n) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

3) On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$. Au bout d'un grand nombre d'étapes, la particule est presque sûrement en C et y reste.

Exercice n° 8

1) Soit p un nombre premier. $E_p = p\mathbb{N}^*$ puis

$$P(E_p) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{kp\}) = \frac{1}{\zeta(s)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(kp)^s} = \frac{1}{p^s}\times\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s} = \frac{1}{p^s}.$$

2) Soit $s > 1$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ puis $p_1, \ldots, p_k$, des nombres premiers deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n \in E_{p_1} \cap \ldots \cap E_{p_k} &\Leftrightarrow n \in (p_1\mathbb{N}^*) \cap \ldots \cap (p_k\mathbb{N}^*) \\ &\Leftrightarrow n \in p_1 \ldots p_k\mathbb{N}^* \text{ (car les } p_i \text{ sont des nombres premiers deux à deux distincts).} \end{aligned}$$

Donc, $E_{p_1} \cap \ldots \cap E_{p_k} = E_{p_1\ldots p_k}$ puis

$$P(E_{p_1} \cap \ldots \cap E_{p_k}) = P(E_{p_1\ldots p_k}) = \frac{1}{(p_1\ldots p_k)^s} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{k} P(E_{p_i}).$$

Ceci montre que les événements E_p, $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

3) Puisque tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par au moins un nombre premier et que 1 ne l'est pas, $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{E_p}$ puis

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(\{1\}) = P\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{E_p}\right).$$

La suite $\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_{p_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante et en tenant compte du fait que les $\overline{E_{p_k}}$ sont indépendants car les E_{p_k} le sont (en notant $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers),

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{E_p}\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_{p_k}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{E_{p_k}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}.$$

4) On sait que $\lim_{s\to1}\zeta(s) = +\infty$ (ζ a une limite ℓ en 1, réelle ou infinie car ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$). Pour tout $s > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(s) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$ puis quand s tend vers 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, puis quand n tend vers $+\infty$, $\ell \geqslant +\infty$).

On note toujours $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers. Supposons par l'absurde que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k < +\infty$. Puisque $\frac{1}{p_k} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, on a $\frac{1}{p_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) < +\infty$. On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$.

Pour tout $s > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_k^s}}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_k}}\right) \leqslant S.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient pour tout $s > 1$, $\ln(\zeta(z)) \leqslant S$. Mais ceci contredit le fait que $\lim\limits_{s\to 1} \ln(\zeta(z)) = +\infty$. Donc, la série des inverses des nombres premiers diverge.

Exercice nº 9

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement « on obtient Pile au n-ème lancer » et $F_n = \overline{P_n}$. $E_2 = P_1 \cap P_2$ puis, les lancers étant supposés indépendants,

$$p_2 = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) = p^2.$$

De même,

$$p_3 = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) = (1-p)p^2.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2, F_1)$ est un système complet d'événement.
Ensuite, $\mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(E_{n+2}) = 0$, $\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(E_{n+2}) = \mathbb{P}(E_n) = p_n$ et $\mathbb{P}_{F_1}(E_{n+2}) = \mathbb{P}(E_{n+1}) = p_{n+1}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{n+2} &= \mathbb{P}(E_{n+2}) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)\,\mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(E_{n+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\,\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(E_{n+2}) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}_{F_1}(E_{n+2}) \\
&= (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n
\end{aligned}$$

Donc, $p_1 = 0$, $p_2 = p^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} - (1-p)p_{n+1} - p(1-p)p_n = 0$.

b) Les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux disjoints et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) < +\infty.$$

Ainsi, la série de terme général p_n converge et en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ $(*)$.

c) Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = p_1 + p_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n+2} = p^2 + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n+1} + p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \\
&= p^2 + (1-p)(S - p_1) + p(1-p)S = p^2 + \left(1-p^2\right)S,
\end{aligned}$$

et donc, $p^2 S = p^2$ puis $S = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$. Ceci signifie qu'il est presque sûr d'obtenir deux piles consécutifs au bout d'un nombre fini de lancers.

3) Il s'agit de calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au numéro du lancer où on a obtenu deux x piles consécutifs pour la première fois, c'est à dire $m = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} np_n$. Puisque la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est solution de $(*)$, p_n est ou bien de la forme $\lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou de la forme $(\lambda n + \mu)q^n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$, on a $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$ ou $|q| < 1$. Un théorème de croissances comparées montre alors que $n^3 p_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et donc $np_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Mais alors, la série de terme général np_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} np_n$.

$$\begin{aligned}
m &= \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = p_1 + 2p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)p_{n+2} = 2p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)\left((1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n\right) \\
&= 2p^2 + (1-p)\sum_{n+1}^{+\infty}(n+2)p_{n+1} + p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)p_n \\
&= 2p^2 + (1-p)\left(\sum_{n+1}^{+\infty}(n+1)p_{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n+1}\right) + p(1-p)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np_n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\right) \\
&= 2p^2 + (1-p)(m+1) + p(1-p)(m+2) = 2p^2 + \left(1-p^2\right)m + 2p(1-p)
\end{aligned}$$

et donc, $p^2m = 2p^2 + (1-p) + 2p(1-p) = 1 + p$. Finalement,

$$m = \frac{1+p}{p^2}.$$

Exercice n° 10

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}\right)\\ &\geqslant 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\overline{E_n}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 1,\end{aligned}$$

et donc, $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = 1$.