Planche n° 17. Dénombrements. Probabilités

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (***)

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y$ soit un singleton ?

Exercice n° 2 (***)

Soit $A_1 A_2 \dots A_n$ un polygone convexe à n sommets ($n \geqslant 4$). Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? (Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs).

Exercice n° 3 (*)

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Combien existe-t-il de lois de composition interne sur E ?

Exercice n° 4 (* I)** (le problème du scrutin)

Au cours d'une élection, deux candidats A et B s'affrontent. Le candidat A l'emporte sur le candidat B par a voix contre b ($a > b$). On veut calculer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$ où $(\alpha, \beta, m, n) \in \mathbb{N}^4$. On va de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + n)$ par déplacements successifs de une unité vers la droite ou une unité vers le haut à chaque étape. On appelle chemin de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$ un tel trajet.
Combien y a-t-il de chemins de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$?

2) a) Montrer qu'un chemin de $(0, 1)$ à (a, b), a au moins un point commun avec la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Montrer qu'il y a autant de chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ que de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$.

c) En déduire le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) situés en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0, 0)$.

3) Déterminer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

Exercice n° 5 (* I)**

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.
Montrer que l'événement $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p \right)$ est négligeable

Exercice n° 6 (***)

On tire un entier naturel non nul au hasard. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir n est $\dfrac{1}{2^n}$.

1) Vérifier que l'on définit une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.

2) On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on note E_n l'événement « l'entier tiré est un multiple de n ».

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n.

b) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers non nuls tels que les événements E_a et E_b soient indépendants.

Exercice n° 7 (**)

Une particule se déplace sur un triangle ABC. A l'instant initial, la particule est en A puis, à un instant $n \in \mathbb{N}$,

- si la particule est en A ou en B, elle va sur l'un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$, de manière équiprobable,
- si la particule est en C, elle reste en C à l'instant $n + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement « la particule est en A (resp. en B, en C) à l'instant n ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ puis $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

2) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

3) Quelle est la limite de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$? Interprétez le résultat.

Exercice n° 8 (***)

Pour tout réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

$s > 1$ étant fixé, on pose $P(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, . On définit ainsi une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $E_k = k\mathbb{N}^* = \{kq,\ q \in \mathbb{N}^*\}$.

1) Pour $p \in \mathcal{P}$, calculer E_p.

2) Montrer que les événements E_p, $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

3) En déduire que pour tout réel $s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ (le produit infini étant égal à $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$ où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des nombres premiers). Indication : exprimer l'événement $\{1\}$ en fonction des E_p, $p \in \mathcal{P}$.

4) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge.

Exercice n° 9 (***)

Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile au cours d'un lancer est $p \in]0, 1[$. On lance plusieurs fois cette pièce. Les lancers sont supposés indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : « on obtient deux Piles consécutifs pour la première fois lors des $(n-1)$-ème et n-ème lancers ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n (par convention $p_1 = 0$).

1) Déterminer p_2 et p_3.

2) **a)** Exprimer p_{n+2} en fonctions de p_{n+1} et p_n (on ne cherchera pas à exprimer p_n en fonction de n).

b) Montrer que $p_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interprétez le résultat.

3) En moyenne, combien faut-il de lancers pour obtenir deux piles consécutifs ?